ARCHIV FÜR METEOROLOGIE, GEOPHYSIK UND BIOKLIMATOLOGIE

HERAUSGEGEBEN VON

DOZENT DR. W. MÖRIKOFER
PHYSIKALISCH-METEOROLOGISCHES OBSERVATORIUM
DAVOS

PROF. DR. F. STEINHAUSER
ZENTRALANSTALT FÜR METEOROLOGIE UND GEODYNAMIK
WIEN

SERIE A
METEOROLOGIE UND GEOPHYSIK

BAND I, 2. HEFT
MIT 37 TEXTABBILDUNGEN
(ABGESCHLOSSEN AM 4. DEZEMBER 1948)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1948

Arch. Met. Geoph.
Biokl. A.

Serie A, Band I **Inhaltsverzeichnis** Heft 2

Seite

Mieghem, van, J. L'instabilité hydrodynamique et les perturbations du courant zonal d'Ouest 144

Defant, F. Theorie der Steuerung und Spaltung von Bodendruckstörungen durch quasi-stationäre Höhendruckverteilungen. (Mit 28 Textabbildungen) 149

Scherhag, R. Die Wintertemperaturen in Berlin und die Sonnenfleckenrelativzahlen. (Mit 2 Textabbildungen) 233

Israel, H. Die halbtägige Welle des luftelektrischen Potentialgefälles. (Mit 2 Textabbildungen) 247

Reuter, H. Die Modifikation einer Luftmasse durch die nächtliche Abkühlung der Erdoberfläche. (Mit 4 Textabbildungen) 252

Eckel, O. Über die Mischungsarbeit von stabil geschichteten Wassermassen. (Mit 1 Textabbildung) 264

Buchbesprechungen 270

Das

„Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie"

erscheint in zwangloser Folge in zwei parallelen Serien:

Serie A Meteorologie und Geophysik: Allgemeine, theoretische und synoptische Meteorologie, Geophysik der Atmosphäre, des Meeres und des festen Erdbodens.

Serie B Allgemeine und biologische Klimatologie: Allgemeine und medizinische Klimatologie, Agrar- und Mikroklimatologie, Meteorobiologie, Strahlungsforschung.

Die beiden Serien können unabhängig voneinander bezogen werden. Die Hefte werden einzeln berechnet und zu Bänden von 25—30 Bogen vereinigt.

Das Archiv soll wissenschaftlich einwandfreie Arbeiten von allgemein fachlichem Interesse veröffentlichen. Es werden deshalb nur Originalarbeiten aufgenommen, die neue Erkenntnisse bringen, und zwar Aufsätze größeren Umfanges wie auch kleine Mitteilungen. Gelegentlich wird auch durch Sammelreferate über die neuesten Ergebnisse einzelner Spezialgebiete ein Überblick über den jeweiligen Stand eines bestimmten Problems gegeben werden, wobei besonders durch Hervorheben der noch ungelösten Fragen der weiteren Forschung Anreiz geboten werden soll. Schließlich werden auch kritische Buchbesprechungen auf bedeutende Neuerscheinungen aus unserem Wissensgebiet hinweisen.

Die Verfasser werden gebeten, den Text möglichst knapp zu fassen und historische Einleitungen tunlichst zu vermeiden. In den beigegebenen Tabellen ist die Wiedergabe unverarbeiteten, umfangreichen Beobachtungsmaterials zu vermeiden; auch sollen die Resultate im allgemeinen nicht durch Tabellen und Kurven gleichzeitig wiedergegeben werden. Die Tabellen sollen eine Überschrift tragen.

Die Arbeiten können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung in mindestens zwei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt. Die Literaturhinweise erfolgen durch im laufenden Text in Klammern eingefügte Nummern, die genaue Zitate bezeichnen, die in einem Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit zusammenzustellen sind.

Die Manuskripte sind gewöhnlich in Maschinenschrift auf einseitig beschriebenen, fortlaufend paginierten Blättern abzufassen. Abbildungsvorlagen sind in so sauberer Wiedergabe einzusenden, daß sie entweder unverändert verwendet oder durch Zeichner des Verlages einwandfrei neu gezeichnet werden können. Die Beschriftung, die innerhalb der Zeichnung angebracht wird, ist nur mit weichem Bleistift einzutragen. Unterschriften zu den Zeichnungen werden im Druck wiedergegeben, ihre Vorlagen sollen dem Manuskript direkt beigegeben werden.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

551.511 : 551.513.1

L'instabilité hydrodynamique et les perturbations du courant zonal d'Ouest.

Par

J. van Mieghem, Bruxelles.

Résumé. Le rôle de l'instabilité hydrodynamique dans la formation des tourbillons cycloniques qui accompagnent le courant zonal d'W est mis en évidence. La stabilité hydrodynamique favorise au contraire le développement d'une circulation anticyclonique. On peut ainsi comprendre le sens de rotation des tourbillons qui naissent au N et au S de la ceinture des vents maxima d'W, tant dans la troposphère inférieure que dans la troposphère supérieure. Enfin, l'auteur démontre le principe de PARR, grâce à la relation entre la stabilité hydrostatique et l'instabilité hydrodynamique.

Zusammenfassung. Es wird die Rolle der hydrodynamischen Labilität bei der Bildung zyklonaler Wirbel dargelegt, die die zonale Westströmung begleiten; im Gegensatz dazu begünstigt die hydrodynamische Stabilität die Entwicklung einer antizyklonalen Zirkulation. Daraus läßt sich der Rotationssinn der Wirbel erklären, die auf der Nord- bzw. der Südseite des Gürtels maximaler Westströmung teils in der unteren, teils in der oberen Troposphäre entstehen. Zum Schluß wird an Hand der Beziehung zwischen der hydrostatischen Stabilität und der hydrodynamischen Labilität das Prinzip von PARR dargelegt.

Summary. The importance of the hydrodynamic instability for the formation of cyclonic vortices which accompany the zonal western current is pointed out. On the contrary the hydrodynamic stability is favorable for the development of an anticyclonic circulation. Therefore the sense of rotation of the vortices arising N or S of the zone of the most intense west winds, in the lower as well as in the upper troposphere, can be understood. Finally, the author demonstrates the principle of PARR by means of the relation between hydrostatic stability and hydrodynamic instability.

1. — Les travaux de H. SOLBERG [*7*] sur la stabilité des oscillations d'inertie du tourbillon circulaire et ceux de E. KLEINSCHMIDT [*2*] sur la stabilité du courant géostrophique avaient attiré mon attention sur le rôle de l'instabilité hydrodynamique dans le processus de la cyclogénèse [*8*].

Les résultats des études aérologiques effectuées au cours de l'année académique 1946—47 au „Department of Meteorology" de l'Université de Chicago [*1*], par un groupe de chercheurs, sous la direction de E. PALMÉN et C. G. ROSSBY, m'ont convaincu que l'instabilité hydrodynamique est un facteur essentiel dans la formation des perturbations du courant zonal d'W, tant dans la troposphère inférieure que dans la troposphère supérieure.

La fig. 16 du rapport du groupe de chercheurs de Chicago [*1*] est particulièrement suggestive à cet égard. Cette figure représente une coupe méridienne de l'atmosphère le 17 janvier 1947, de La Havane à Thule (Groenland). Elle montre l'existence d'un courant d'W s'étendant du sol jusque dans la stratosphère, entre les latitudes d'*environ* 25° et 60° N. A tous les niveaux atteints par les sondages, le vent d'W est maximum par *environ* 40° de latitude N; le maximum absolu (> 90 m/sec, immédiatement au S de la zone du front polaire) se trouve pratiquement au niveau de la tropopause (~ 250 mb.), et par suite, on a

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial U}{\partial y} > 0 \text{ au S de } 40° \text{ de lat. N,}\\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y} < 0 \text{ au N de } 40° \text{ de lat. N,}\end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial U}{\partial z} > 0 \text{ dans la troposphère,}\\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial z} < 0 \text{ dans la stratosphère,}\end{array}\right.$$

où U représente l'intensité du vent d'W et où y, z désignent respectivement un axe horizontal dirigé vers le N et un axe vertical dirigé vers le zénith. Il en résulte que le courant zonal U possède, par rapport à la Terre, une rotationnelle dont la composante verticale $-\dfrac{\partial U}{\partial y}$ est anticyclonique au S et cyclonique au N du maximum de U. De plus, la valeur absolue $\left|\dfrac{\partial U}{\partial y}\right|$ de l'ascendant méridional $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ de l'intensité U du courant zonal d'W est plus grande au S qu'au N de la latitude de 40° où se produit le maximum de U, de sorte que la rotationnelle anticyclonique au S de 40° de latitude est plus intense que la rotationnelle cyclonique au N de cette latitude.

2. — Admettons que la force de Coriolis appliquée au courant U par la rotation de la Terre, soit exactement compensée par la force due au gradient méridien de la pression; nous pouvons alors considérer l'état de mouvement zonal d'W représenté à la fig. 16 [1], comme étant un état d'équilibre hydrodynamique au sens de E. KLEINSCHMIDT [*2*]. Supposons ensuite que la répartition de la température potentielle Θ de l'air soit zonale; dans ce cas, le courant U détermine dans les surfaces isentropiques un tourbillon de glissement dont la composante verticale est définie par

$$-\frac{\delta U}{\delta y} \equiv -\frac{\partial U}{\partial y} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} : \frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Cela étant, considérons une particule d'air entraînée par le courant U, et imprimons lui une impulsion méridienne: soient r_y, r_z les composantes horizontale et verticale du déplacement qui en résulte. La particule, abandonnée à elle même, est alors soumise à une force méridienne dont

les composantes horizontale et verticale sont, par unité de masse, exprimées, *en première approximation*, par [8]

$$\begin{cases} f_y \simeq -2\Omega_z\left[2\Omega_z - \theta\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{U}{\theta}\right)\right] r_y + 2\Omega_z\left[\theta\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{U}{\theta}\right)\right] r_z, \\ f_z \simeq -\dfrac{g}{\theta}\left[\dfrac{\partial\theta}{\partial y} r_y + \dfrac{\partial\theta}{\partial z} r_z\right], \end{cases}$$

où Ω_z est la composante verticale de la rotation de la Terre.

Envisageons d'abord un *déplacement vertical* ($r_y = 0$, $r_z \neq 0$); on peut alors négliger la rotation de la Terre; d'où,

$$f_y \simeq 0, \qquad f_z \simeq -\frac{g}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} r_z.$$

La répartition verticale des masses d'air étant généralement stable en dehors d'une couche près du sol où les mouvements convectifs sont toujours possibles, on peut supposer que, dans l'atmosphère libre, on a, d'une manière générale, $\dfrac{\partial\theta}{\partial z} > 0$; dans ce cas, la force verticale f_z est toujours une force de rappel qui tend à rapprocher la particule déplacée de son point de départ. Après quelques oscillations verticales de courte période (5 à 10 minutes), la particule reprend sa position initiale (position d'équilibre hydrostatique) [7, 8]. Dès lors, dans une atmosphère en équilibre hydrostatique stable suivant la verticale, on peut admettre que les particules d'air se déplacent le long de surfaces isentropiques, à condition de supposer adiabatiques les transformations physiques de l'air (invariance de la température potentielle de la particule le long de sa trajectoire).

Considérons ensuite un *déplacement isentropique*, on a

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} r_y + \frac{\partial\theta}{\partial z} r_z = 0$$

et par suite, la force méridienne que le milieu ambiant applique à la particule déplacée, est horizontale en première approximation; elle est définie par

$$f_y \simeq -2\Omega_z\left[2\Omega_z - \frac{\delta U}{\delta y}\right] r_y, \qquad f_z \simeq 0,$$

où r_y est la composante horizontale du déplacement méridien isentropique considéré. Cette force est une force de rappel qui rapproche la particule déplacée de son point de départ, lorsque

$$\frac{\delta U}{\delta y} < 2\Omega_z;$$

au contraire, elle est une force répulsive qui écarte la particule déplacée de son point de départ, dès que

$$\frac{\delta U}{\delta y} > 2\Omega_z.$$

Ainsi, le courant zonal U est stable lorsqu'il détermine dans les surfaces isentropiques un tourbillon de glissement dont la composante verticale

est cyclonique $\left(\frac{\delta U}{\delta y} < 0\right)$ ou faiblement anticyclonique $\left(0 < \frac{\delta U}{\delta y} < 2\,\Omega_z\right)$; le courant est instable lorsque la composante verticale de ce tourbillon de glissement est fortement anticyclonique $\left(0 < 2\,\Omega_z < \frac{\delta U}{\delta y}\right)$ [2]. De plus, nous avons montré [8] que toute particule déplacée dans la surface isentropique passant par sa position initiale (position d'équilibre hydrodynamique), prend, dans cette surface, une circulation anticyclonique par rapport à la Terre, dans le cas de la stabilité, et une circulation cyclonique, dans le cas de l'instabilité.

3. — Il résulte de la définition de $\frac{\delta U}{\delta y}$, que l'instabilité du courant d'W ne peut apparaître que là où les isentropes ($\Theta = C^{ste}$) et les lignes d'égale intensité ($U = C^{ste}$) du courant d'W se coupent et où en même temps les ascendants $\nabla\Theta$ et ∇U de la température potentielle Θ de l'air et de l'intensité U du vent d'W, ainsi que la pente $-\frac{\partial\theta}{\partial y} : \frac{\partial\theta}{\partial z}$ des surfaces isentropiques, sont maxima. En se reportant à la fig. 16 [1], on constate que ces circonstances ne se produisent que dans deux régions:

1° dans la troposphère supérieure, au S de la ceinture des vents d'W maxima où

$$\frac{\delta U}{\delta y} = 0{,}9 \text{ à } 0{,}8 \cdot 10^{-4}\,\text{sec}^{-1} > 2\,\Omega_z \simeq 0{,}8 \cdot 10^{-4}\,\text{sec}^{-1}$$

entre 500 et 300 mb,

2° dans la troposphère inférieure, dans la zone du front polaire et immédiatement au N de celle-ci, où

$$\frac{\delta U}{\delta y} \simeq 0.6 \text{ à } 0.7 \cdot 10^{-4}\,\text{sec}^{-1}$$

entre 900 et 600 mb. Remarquons qu'ici il faudrait remplacer les isoplèthes de la température potentielle par les isoplèthes de la température potentielle du thermomètre mouillé (ou de la température potentielle équivalente) dont l'inclinaison est nécessairement plus forte, de sorte qu'en fait, dans cette partie de la troposphère inférieure, l'instabilité hydrodynamique est plus forte que ne le font apparaître les isentropes de la coupe méridienne verticale La Havane—Thule (Groenland) du 17 janvier 1947 (voir fig. 16 [1]). On peut donc affirmer que dans ces deux régions, il y a instabilité hydrodynamique.

Par contre, dans la troposphère supérieure, au N de la ceinture des vents d'W maxima, les isoplèthes $U = C^{ste}$ et $\Theta = C^{ste}$ sont pratiquement parallèles et dans la troposphère inférieure, au S de cette ceinture, les isentropes sont quasi-horizontales. Ces deux dernières régions sont donc caractérisées par une grande stabilité hydrodynamique.

Par conséquent, dans la troposphère supérieure, un déplacement isentropique méridien des particules d'air favorise la formation d'une circulation cyclonique aux basses latitudes des régions tempérées et une circulation anticyclonique aux latitudes plus élevées. L'existence

de ces deux circulations a été mise en évidence par le groupe de chercheurs de Chicago [*1*]. Au contraire, dans la troposphère inférieure, un déplacement isentropique méridien des particules d'air favorise la formation d'une circulation cyclonique aux latitudes élevées des régions tempérées et une circulation anticyclonique au S du front polaire. L'existence de cette dernière circulation a été montrée par H. Wexler et J. Namias [*9*]. Quant aux circulations cycloniques de la troposphère inférieure des latitudes moyennes, elles ne sont autres que celles qui caractérisent l'activité du front polaire [*8*].

4. — La cause des déplacements isentropiques des particules d'air réside dans une propriété intrinsèque des mouvements de l'air; à savoir: la *turbulence*. Rossby et ses collaborateurs [*3* et *6*] ont montré qu'en dehors des couches d'air près du sol, où prédominent les échanges turbulents suivant la verticale, il existe, dans l'atmosphère libre, une turbulence méridienne isentropique [*5*]. Les parcours de mélange (*Mischungsweg* de Prandtl) des particules participant à l'échange turbulent latéral au sein d'une même couche isentropique, étant de l'ordre de plusieurs centaines de km [*6*], on ne peut négliger l'action de la force de Coriolis sur le mouvement de ces particules. Dès lors, si l'on considère le mouvement turbulent des particules d'air, avant leur mélange avec l'air ambiant, comme étant un mouvement isentropique d'inertie, ces particules prennent une circulation anticyclonique ou cyclonique suivant qu'il y a stabilité ou instabilité hydrodynamique au sein de la couche isentropique considérée [*8*].

5. — En terminant, proposons-nous de démontrer le principe de Parr [*4*] en vertu duquel le mélange latéral isentropique des masses d'air s'intensifie à mesure que la stabilité de la répartition verticale des couches d'air augmente. Remarquons d'abord que la stabilité hydrodynamique atténue le mélange isentropique latéral, tandis que l'instabilité hydrodynamique renforce ce mélange. Ceci résulte du fait qu'une particule d'air consomme ou libère de l'énergie au cours d'un déplacement isentropique méridien, suivant qu'il y a stabilité ou instabilité hydrodynamique dans la surface isentropique considérée. En effet, nous avons montré [*8*] que l'accroissement $\frac{1}{2} dv^2_y$ de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} v^2_y$, par unité de masse, de la particule déplacée est donné, en première approximation, par la formule

$$\frac{1}{2} dv^2_y = f_y \, dr_y = -2\,\Omega_z \left(2\,\Omega_z - \frac{\delta U}{\delta y}\right) r_y \, dr_y,$$

et par suite, l'expression

$$-2\,\Omega_z \left(2\,\Omega_z - \frac{\delta U}{\delta y}\right) \frac{r^2_y}{2}$$

représente *l'énergie d'instabilité* libérée, par unité de masse, par la particule au cours de son déplacement isentropique méridien de composante horizontale r_y. Cette énergie d'instabilité est positive ou négative suivant qu'il y a instabilité ou stabilité hydrodynamique.

D'autre part, la stabilité hydrodynamique diminue et l'instabilité hydrodynamique augmente lorsque $\nabla\Theta$ croît, c'est-à-dire lorsque les surfaces isentropiques se rapprochent. Or, dans ce cas, la stabilité hydrostatique suivant la verticale se renforce. Le principe de PARR se trouve ainsi démontré.

Bibliographie.

1. Staff Members of the Department of Meteorology of the University of Chicago: On the General Circulation of the Atmosphere in Middle Latitudes. Bull. Amer. Met. Soc. **28**, 255—280 (1947).
2. KLEINSCHMIDT, E.: Stabilitätstheorie des geostrophischen Windfeldes. Ann. Hydr. mar. Meteor. **49**, 305—325 (1941).
   MÖLLER, F.: Der Zusammenhang statischer und dynamischer Stabilität nach E. KLEINSCHMIDT. Meteorol. Z. **60**, 269—273 (1943).
3. GRIMMINGER, G.: The Intensity of lateral Mixing in the Atmosphere as determined from isentropic charts. Trans. Amer. geophysic. Union. 19 th. Ann. Meet. 1938, p. 163.
4. PARR, A. E.: On the probable Relationship between Vertical Stability and Lateral Mixing Processes. J. Conseil permanent int. Explorat. Mer. Copenhague 1936, **11**, 308—313.
5. RAETHJEN, P.: Labile Gleitumlagerungen. Ann. hydr. mar. Meteorol. **49**, 325—331 (1941).
   Kurzer Abriß der Meteorologie. Wolfenbütteler Verlangsanst. Hannover. 53—59 (1947).
6. ROSSBY, C. G.: Dynamics of Steady Ocean Currents in the light of experimental Fluid Mechanics. Papers Phys. Ocean. Meteor., Mass. Inst. of Technology and Woods Hole Ocean. Inst. **5**, 1—14 (1936).
   ROSSBY, C. G. and Coll.: Aerological Evidence of large-scale Mixing in the Atmosphere. Trans. Amer. Geophys. Union, 18 th. Meet. 130—136 (**1937**).
   ROSSBY, C. G. and Coll.: Fluid Mechanics applied to the study of Atmospheric Circulations. Papers Phys. Ocean Meteor. Mass. Inst. of Technology and Woods Hole Ocean. Inst. **7**, 1—125 (1938).
7. SOLBERG, H.: Le mouvement d'inertie de l'atmosphère stable et son rôle dans la théorie des cyclones, U. G. G. I. 6. Ass. Gén. Edimbourg, sept. 1936, Procès-Verbaux Ass. Météor., II Mém. et Disc. Paris, 66—82 (1939).
8. MIEGHEM, J. VAN: Sur la stabilité du courant géostrophique. La Météorologie. Paris 9—33 (**1946**).
   Contribution à l'étude de la Cyclogénèse. Inst. Roy. Météor. de Belgique, Mém. **23**, 1—24 (1946).
9. WEXLER, H. and NAMIAS, J.: Mean Monthly Isentropic Charts and their Relation to Departures of Summer Rainfall. Trans. Amer. Geophys. Union, 19 th Ann. Meet. 164—170 (**1938**).

551.515.13

(Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Innsbruck.)

Theorie der Steuerung und Spaltung von Bodendruckstörungen durch quasi-stationäre Höhendruckverteilungen.

Von

F. Defant, Innsbruck.

Mit 28 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Anschließend an die Untersuchungen über die primären und sekundären Druckwellen in der Atmosphäre wird die Bewegung von Bodendruckstörungen an Hand einer rechnerischen Auswertung der theoretischen Lösungen für den Bodendruck p, die unter verschiedener Annahme der Bodendruckverteilung und der Höhendruckverteilung in 7 km Höhe zur Zeit $t = 0$ erzielt wurden, näher untersucht und das Problem der Beeinflussung dieser Bewegung der Bodendruckstörungen durch die obere primäre Druckverteilung, d. h. die Steuerung der troposphärischen Druckstörungen durch diese eingehend erörtert.

Als Hauptergebnis wird gefunden, daß nur eine quasistationäre Höhendruckverteilung in der Lage ist, eine sichtbare Beeinflussung der Bewegungsrichtung (Steuerung) der Bodentiefdruckgebiete zu erzielen, während im Falle einer schnell sich ändernden Drucksituation in der Höhe die Druckstörungen am Boden keine Steuerung durch diese erfahren. Weiter wird gezeigt, daß die Intensität der Steuerung davon abhängt, wie die obere Druckwelle zum Aufbau der Troposphäre paßt und um so größer ist, je näher die Periode der oberen Druckwelle der Periode der unteren troposphärischen Wellen kommt.

Insbesondere wurde die Frage der Teilung oder Spaltung der Bodentiefdruckgebiete in Verbindung mit der Erscheinung der Steuerung näher untersucht; die Ergebnisse wurden mit den bisherigen praktisch-synoptischen Untersuchungen verglichen.

Im Zusammenhang mit der Art der Steuerung wurden auch die Intensitätsänderung der Bodendruckstörungen, die Bodendruckänderung und ihre stratosphärischen bzw. troposphärischen Anteile theoretisch und an Hand der rechnerischen Ergebnisse behandelt und daraus einige Regeln für die Praxis abgeleitet.

Summary. In pursuance of the studies on the primary and secondary pressure waves in the atmosphere, the movement of surface pressure

disturbances has been investigated by numerically evaluating the theoretical solutions for the surface pressure p obtained under various assumptions of the pressure distribution on the surface and at the height of 7 km. at the time $t = 0$. The problem in which way this movement is influenced by the primary distribution of pressure in the upper air, that is the steering (Steuerung) of the tropospheric pressure disturbances by it, is thoroughly discussed.

It has been found as a principal result that only the quasi-stationary distribution of pressure in the upper air is capable of visibly influencing the direction of the movement (steering) of the low pressure areas on the surface, whereas no such influence exists in the case of a rapidly varying pressure situation in the higher atmosphere. Furthermore it is shown that the intensity of the steering process (Steuerung) depends on whether the upper pressure wave is fitting into the structure of the troposphere and that it is the greater the more the period of the upper pressure wave is approaching the period of the lower tropospheric waves.

Particularly, the question of the partition or splitting of the low pressure areas on the surface, in connection with the steering phenomenon (Steuerung), has been investigated in detail and the results have been confronted with previous synoptic investigations.

In connection with the steering process (Steuerung) also the variation of intensity of the surface pressure disturbances as well as the variation of the surface pressure and its stratospheric, respectively tropospheric portions are treated theoretically and by taking into account the results of calculations. Hence several rules are derived for the practice.

Résumé. L'article fait suite aux recherches relatives aux ondes atmosphériques de pression primaires et secondaires. On étudie le déplacement de perturbations du champ de pression au sol sur la base des solutions que fournit la théorie appliquée à la pression au sol, solutions obtenues à partir de différentes distributions de la pression au sol et à 7 km. d'altitude à l'origine des temps. Cela mène à considérer également l'effet de l'onde primaire de pression sur le déplacement de ces perturbations au niveau du sol, c'est dire le phénomène de pilotage (Steuerung) des perturbations troposphériques par les ondes primaires.

On trouve comme résultat essentiel que seule une distribution quasi-stationnaire de la pression en altitude a une influence notable sur le sens de déplacement des centres de basse pression au niveau du sol, tandis que cet effet est nul dans le cas des champs de pression rapidement variables en altitude. De plus, on constate que l'effet est d'autant plus marqué que la période de l'onde primaire est plus voisine de celle de l'onde troposphérique.

L'auteur étudie le problème de la scission des dépressions au sol en relation avec l'action des ondes de pression en altitude, et compare ses conclusions avec celles auxquelles ont abouti les recherches synoptiques antérieures. Il traite enfin des vitesses d'évolution des perturbations de pression et des variations de pression du point de vue de leurs composantes stratosphériques et troposphériques et en tire quelques règles pratiques.

I. Einleitung.

Die Frage des Aufbaues der Druckstörungen in der Atmosphäre hat v. Ficker in mehreren grundlegenden Arbeiten [*1*—*7*] erörtert und als Hauptergebnis seiner Untersuchungen die komplexe Natur der Druck-

schwankungen am Erdboden festgestellt. Die Druckstörungen am Boden lassen sich aufspalten in eine primäre und in eine sekundäre Druckschwankung, deren Sitz bei den ersteren vermutlich die Stratosphäre, bei den letzteren die Troposphäre ist. Diese ist thermisch-advektiver Natur und steht zu ersterer in einem zeitlichen Phasenverhältnis. Die Worte „primär und sekundär" sind nach v. Ficker lediglich Bezeichnungen und enthalten keine Aussage darüber, in welcher Weise diese Wellen ursächlich zueinander stehen und welche in ihrer Auswirkung die vorherrschende ist. v. Ficker leitet typische Entwicklungsstadien der Depression in der Niederung ab, deren Druckänderungsanteile primärer und sekundärer Art wenigstens dem Vorzeichen, weniger aber der genauen Größe nach bestimmbar sind. Die Abhängigkeit der Größe beider Arten von Druckschwankungen in der Atmosphäre von der geographischen Breite findet Erwähnung im Sinne einer Abnahme der Amplituden der Schwankungen südwärts, ebenso wie der Einfluß der thermischen Schwankung in niedrigen Breiten gegenüber dem der primären ausgesprochener wird. Die Feststellung v. Fickers, daß die Änderungsgebiete des Luftdruckes (Druckfall und Anstieg) in den hohen Breiten mehr primärer Natur, in südlicheren Breiten mehr den Charakter der sekundären Schwankung tragen, sei hier eingangs besonders hervorgehoben, da sie später im Zusammenhang mit den Arbeiten von H. Hoinkes näher diskutiert werden wird. Der Nachweis des Vorhandenseins zweier verschiedener Druckschwankungen wird durch v. Ficker besonders an Hand einer Bearbeitung von Material von Gipfelstationen des Alpengebietes deutlich gemacht, wo durch das Gebirgshindernis der sekundäre (thermische) Druckanteil völlig zerstört wird und am Kamm und im Lee des Gebirges der primäre obere Anteil allein übrig bleibt und zur Wirkung kommt [7]. Zu erwähnen ist noch, daß diese Ergebnisse durch v. Ficker nur aus einer Bearbeitung eines reichen Beobachtungsmaterials russischer und alpenländischer Stationen abgeleitet wurden.

Feststellungen, die v. Ficker bereits 1920 bis 1922 [8] gemacht hat, beinhalten, daß die stratosphärischen Vorgänge in der Lage sind, troposphärische Bewegungen auszulösen, z. B. Aktivierung troposphärischer Kaltluftmassen durch ein oberes primäres Druckfallgebiet. Die Zusammensetzung der Depressionen aus troposphärischen und stratosphärischen Anteilen scheint damit erwiesen, doch wird hier auf die Wichtigkeit kompensierender Temperaturvorgänge der hohen Troposphärenschichten Bezug genommen; ebenso wie die unteren Schichten durch Advektion kalter und warmer Luft kompensierend wirken, sind auch die höheren Lagen der Troposphäre durch raschen Wechsel auf- und absteigender Luftströmungen am Druckeffekt in der Niederung außerordentlich kompensierend beteiligt.

Im weiteren hat dann v. Ficker den Begriff der „Steuerung" (1929) geprägt und seine Auffassung der Beeinflussung der Troposphäre durch die Stratosphäre und umgekehrt in nachfolgender Weise präzisiert. Nach seiner Anschauung kann ein System nur dann als gesteuert bezeichnet werden, wenn es sich nicht so bewegt, wie es sich eigengesetzlich, auf

Grund der inneren Kräfte, Luftmassenverteilung und der aus ihr resultierenden Druckverteilung bewegen würde, und wenn diese von der eigengesetzlichen abweichende Bewegung auf Grund von Vorgängen außerhalb des betrachteten Systems erfolgt. Im Zusammenhang mit der Erscheinung, daß eine ruhende troposphärische Kaltluftmasse durch den Vorüberzug eines oberen Druckfallgebietes aktiviert, d. h. in Bewegung gesetzt wird und durch das nachfolgende Steiggebiet des Luftdruckes in der Höhe aus ihrer Bewegungsrichtung abgelenkt wird, gebraucht v. Ficker das Wort „Steuerung". Die Entstehung und Herkunft der stratosphärischen Druckschwankungen läßt v. Ficker offen, wenn er auch den Grund der Entstehung solcher Druckwellen in einer Verlagerung des „äquatorialen Systems" sieht und so die eigentliche Ursache der Schwankungen in den tropisch-troposphärischen Heizraum der Erdatmosphäre verlegt.

Diese Begriffe, die v. Ficker ausführlich in einer Zusammenstellung, betitelt „Zur Frage der Steuerung in der Atmosphäre" [*9*], behandelt hat, sollen hier genügen und es soll hier kein Bezug auf die Wandlungen und Abänderungen des v. Fickerschen Steuerungsbegriffes durch die verschiedenen Vertreter der einzelnen Meteorologenschulen genommen werden. Es genügt für das Folgende die einfache und klare Formulierung der v. Fickerschen Ansicht über die komplexe Natur der Druckschwankung am Boden und über den Begriff der Steuerung, abgeleitet aus den statistischen Untersuchungen von Beobachtungsmaterial und aerologischen Daten.

Von der rein theoretischen Seite her ist besonders von A. Defant zu diesem Fragenkomplex ein wertvoller Beitrag geleistet worden [*10*] [*11*], um über das genetische Verhältnis der oberen und unteren Wellen zueinander Aufschluß zu erhalten. In diesen Untersuchungen, die zeigten, daß das Vorwärtsbewegen einer troposphärischen Kaltmasse in der Stratosphäre zu Störungen, d. h. Druckwellen führt, wurde offensichtlich der genetische Ursprung solcher oberer Wellen in die Troposphäre gelegt. Diese Art der theoretischen Erklärung widerspricht in keiner Weise der v. Fickerschen Auffassung, denn die bei diesen Vorgängen auftretende negative Phasenverschiebung der primären gegen die thermisch sekundäre Welle bis zu einer halben Wellenlänge entspricht ganz dem v. Fickerschen Schema. In theoretischer Hinsicht haben dann A. Defant, Stüve und Philipps [*12, 13, 14*] in drei weiteren Arbeiten versucht zu zeigen, daß auch bei Vorhandensein von stratosphärischen Wellen diese induzierenden Einfluß auf die troposphärischen Bewegungen haben können und haben damit den genetisch primären Vorgang der Stratosphäre zugeschrieben.

Die durch A. Defant [*12*] angenommene ostwärts fortschreitende Druckwelle in der Höhe (7 km) erzeugt bei Vorhandensein eines meridionalen Temperaturgefälles in der Troposphäre eine sekundäre Welle, deren Phasengeschwindigkeit nur vom troposphärischen Temperaturgefälle, also nur vom atmosphärischen Grundzustand in der allgemeinen Zirkulation, abhängt. Die Amplitude der so entstandenen komplexen

Druckwelle in der Niederung ist proportional dem Verhältnis Höhendruck-Bodendruck und die komplexe Schwankung am Boden erreicht dann ihr Maximum, wenn die Geschwindigkeiten der primären und sekundären Wellen nahezu übereinstimmen. Für die Entwicklung der Bodendruckwelle ist wichtig, ob die Periode der oberen Welle zum Aufbau der Troposphäre paßt. Sind die Phasengeschwindigkeiten der oberen und unteren Welle verschieden, so läßt sich aus der Rechnung der charakteristische Verlauf der Lebensgeschichte einer Depression ableiten. (Rückwärtsneigung der Achse der Zyklonen am Erdboden und in der Höhe im aufsteigenden, Vorwärtsneigung im absteigenden Ast). Die Schwebung, die die Amplitude der Bodendruckwelle dabei zeigt, hängt vom Unterschied der ungleichen Phasengeschwindigkeiten der primären und sekundären Wellen ab. Daß die Symmetriepunkte L. Weickmanns durch diese theoretische Behandlung A. Defants eine, wenn auch nicht umfassende, Erklärung finden, sei noch erwähnt.

Mügge hat in seiner Arbeit Thermozyklogenese [*13*] auf graphischem Wege ähnliche Ergebnisse wie A. Defant erzielt, die das Grundsätzliche in den wesentlichen Punkten erfassen und mit den Erfahrungstatsachen beim Entstehen und Vergehen der Zyklonen weitgehend übereinstimmen. In der Arbeit von Philipps [*14*] sind einige Hinweise auf diese Fragen in Verbindung mit A. Defants Theorie gegeben worden, doch fehlt bei ihm jede Form von rechnerischen Beispielen und seine Arbeit stellt im wesentlichen eine Erweiterung der A. Defantschen theoretischen Arbeit dar unter Hinzunahme schwierigerer mathematischer Annahmen.

Zusammenfassend ist die theoretische Untersuchung A. Defants, in welcher die statische Grundgleichung, die Gleichung des geostrophischen Windes und die Adiabatengleichung das Fundament der Theorie darstellen, eine genügend genaue Grundlage für weitere Untersuchungen und ist offenbar eine weitgehende Annäherung an die in der Atmosphäre im Einklang mit den v. Fickerschen Untersuchungen auftretenden und beobachteten Tatsachen.

In dieser Untersuchung ist der Zusammenhang der Wanderung der Zyklonen mit dem Temperaturfeld in der Troposphäre nicht näher untersucht worden, auch ist in ihr nicht weiter verfolgt worden, wie die Bahnen der Tiefdruckgebiete am Boden von den Vorgängen in der Troposphäre bzw. Stratosphäre abhängen können. Zweifelsohne ist es möglich, die Theorie von A. Defant in dieser Richtung weiter auszubauen und in den für die synoptische Meteorologie so entscheidenden Fragen der Beeinflussung der Zyklonenbewegung durch tropo- bzw. stratosphärische Einflüsse, also in den Fragen der atmosphärischen Steuerung zu erweitern. Dies sei ein Ziel vorliegender Arbeit, die versucht, in theoretischer Weise bzw. an Hand von Zahlenbeispielen diesen Fragen näher zu kommen.

Dabei ist es unerläßlich, auf die bisherigen theoretischen Lösungen bzw. auf die in der früheren Arbeit gegebenen rechnerischen Beispiele kurz etwas einzugehen und dann erst den neuen Fragen näherzutreten.

II. Die bisherige Untersuchung über primäre und sekundäre Druckwellen in der Atmosphäre.

Unter Gültigkeit der statischen Grundgleichung in der Form

$$p = p_H \cdot e^{\frac{g H}{R T}},$$

(p = Bodendruck, p_H = Druck in der Höhe H, T = Mitteltemperatur der Luftsäule von der Höhe H) wird mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Wärmelehre und unter Annahme einer konstanten Höhe H, sowie zeitlich und örtlich veränderlichem p und p_H die Gleichung

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{c_p R T^2}{g H}\left[\left(1 - \frac{A g H}{c_p T}\right)\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{p_H}\frac{dp_H}{dt} - \right] \qquad (II_1)$$

abgeleitet.

Unter Annahme eines mittleren Geschwindigkeitsvektors innerhalb der Luftsäule von der Höhe H, d. h. beschleunigungslose, horizontale Bewegung der Luft bei angenähert konstanter Richtung der Bewegung, haben die Bewegungsgleichungen (geostrophischer Wind) ohne Berücksichtigung jeglicher Reibung die Form

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{R T}{\omega r^2 \sin 2\varphi}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial \lambda}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{R T}{\omega r^2 \sin 2\varphi}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial \varphi}. \end{aligned} \qquad (II_2)$$

ω = Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation,
r = Erdradius,
φ = geographische Breite,
λ = geographische Länge.

Die Gleichung der Kontinuität ist von selbst erfüllt und für die lokale Änderung des Druckes $\frac{dp}{dt}$ kann ohne Vernachlässigung die partielle Änderung des Druckes $\frac{\partial p}{\partial t}$ gesetzt werden.

Weiterhin soll der Höhendruck p_H in einfacher Form

$$p_H = p_H^0 + \nu \cos 2\varphi + F(n\lambda - \sigma t) \qquad (II_3)$$

sein, was besagt, daß p_H sich aus einem mittleren p_H^0, der Größe des mittleren meridionalen Druckgefälles (zeitlich konstant) $\nu \cdot \cos 2\varphi$ und einer nach Osten mit der Winkelgeschwindigkeit σ wandernden Druckwelle $F(n\lambda - \sigma t)$ zusammensetzt.

Unter Annahme adiabatischer Bewegung der Luftmassen ist die Wärmeänderung $\frac{dQ}{dt} = 0^*$ und es ergibt sich aus den Gleichungen II_1, II_2, II_3 folgende partielle Differentialgleichung für den Bodendruck:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\alpha\sigma F'(n\lambda - \sigma t) - \beta\frac{\partial p}{\partial \lambda} - \gamma\frac{n}{\sin 2\varphi}F'(n\lambda - \sigma t)\frac{\partial p}{\partial \varphi} \qquad (II_4)$$

* Über $\frac{dQ}{dt} \neq 0$, veränderliche Wärmezufuhr, siehe F. DEFANT, [15].

worin, wenn $S = \frac{1}{p_H} \frac{1}{1 + \frac{A g H}{c_p T}}$ ist, $\alpha = p \cdot S$, $\beta = \frac{2 v R T}{\omega r^2} \cdot S$, $\gamma = \frac{R T}{\omega r^2} \cdot S$ ist.

Als Lösungen der Differentialgleichungen II_4 gibt A. Defant an

$$\xi = p + \frac{\alpha \sigma}{n \beta - \sigma} \cdot F(n \lambda - \sigma t),$$
$$\eta = \lambda - \beta t, \qquad (II_5)$$
$$\zeta = \frac{\gamma \cdot n}{n \beta - \sigma} \cdot F(n \lambda - \sigma t) + \frac{1}{2} \cos 2 \varphi.$$

Jede beliebige Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ stellt eine Lösung der Gl. II_4 dar, welche bei verschiedenen Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ jedesmal bestimmt werden kann.

Einzelne Fälle, je nach Wahl der Anfangsbedingungen verschieden, gestatten nun die Untersuchung der Einwirkung der oberen primären Druckwelle auf die Druckverteilung am Boden unter Annahme des meridionalen zeitlich konstanten Druckgefälles.

A) A. Defant behandelt zuerst jene Fälle, wo der Höhendruck zeitlich konstant ist. Für $p_H = \text{const}$ wird die Gl. II_4

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\beta \frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

a) Bei vorgegebener gleichförmiger Bodendruckverteilung zur Zeit $t = 0$ ändert sich nichts und die Druckverteilung am Boden bleibt zu einer anderen Zeit t erhalten.

b) Bei vorgegebenen Bodendruckverteilungen der Form $p_0 = \psi(n \lambda)$ zur Zeit $t = 0$ ist der Bodendruck zu einer anderen Zeit t gegeben durch eine freie Welle mit der Winkelgeschwindigkeit $n \beta$ und der Periode $T_f = \frac{2 \pi}{n \beta}$ von der Form

$$p = \psi(n \lambda - n \beta t). \qquad (II_6)$$

Eine anfängliche Druckstörung am Boden breitet sich, wenn sie einmal erzeugt ist, als freie Druckwelle gegen Osten zu aus mit einer Geschwindigkeit $n \beta$, die wegen $\beta = \frac{2 v \cdot R T}{\omega r^2} \cdot S$ in der Hauptsache nur vom meridionalen Temperaturgefälle, also vom Aufbau des Systems abhängig ist. Die Verschiebung der Bodendruckwelle ist ein Effekt reiner Advektion thermisch verschieden aufgebauter Luftsäulen.

B) Weiterhin werden jene Fälle behandelt, bei denen der Höhendruck nicht konstant ist, sondern in der Höhe H sich eine primäre Druckwelle mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{\sigma}{n}$ ostwärts verschiebt.

a) Bei vorgegebener konstanter Bodendruckverteilung $p_0 = A$ zur Zeit $t = 0$ wird der Bodendruck zu einer anderen Zeit t berechnet zu

$$p = A + \frac{\alpha}{1 + \frac{n\beta}{\sigma}} \cdot [F(n\lambda - \sigma t) - F(n\lambda - n\beta t)]. \qquad (II_7)$$

Zur vorgegebenen anfänglichen Bodendruckverteilung A treten zwei Arten von Wellen hinzu. Erstens die durch die obere primäre Welle erzwungene Welle, deren Amplitude am Boden α-mal, d. i. näherungsweise im Verhältnis der Drucke oben und unten, größer ist; ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit σ ist aber gleich derjenigen der oberen primären Welle. Zweitens tritt eine freie Welle in der Form II_6 auf, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $n\beta$ nur vom meridionalen Temperaturgefälle abhängt, deren Amplitude gleich derjenigen der erzwungenen Welle ist. Damit ist die komplexe Natur der Druckschwankung in der Niederung im Sinne v. Fickers theoretisch erzielt.

Der Faktor $1 - \frac{n\beta}{\sigma}$ gibt Aufschluß über die Größe der Wellen und die Phasenlage der unteren Welle zu der primären oberen Welle.

$$1 - \frac{n\beta}{\sigma} = 1 - \frac{T_z}{T_f}. \qquad (II_8)$$

T_z, T_f = Periode der erzwungenen bzw. freien Welle.

Ist $T_z = T_f$, dann wird die Amplitude theoretisch unendlich groß, Fall der Resonanz.

Ist $T_z \neq T_f$, dann ist die Amplitude um so größer, je näher $T_z = T_f$ wird.

Für $T_z > T_f$, ist der Faktor $1 - \frac{T_z}{T_f}$ negativ und die obere Welle ist den unteren Wellen invers.

Für $T_z < T_f$, ist der Faktor $1 - \frac{T_z}{T_f}$ positiv und die obere Welle ist den unteren Wellen parallel.

C) A. Defant führt nun in die Gl. II_7 für die bisher willkürliche Funktion F die cos-Funktion ein (Amplitude $= \varepsilon$). In Gl. II_7 lassen sich nach den bekannten Winkelgesetzen die beiden cos-Wellen zusammenziehen und es wird aus Gl. II_7 bis auf konstante Grundglieder

$$p = \ldots\ldots + \frac{2\alpha\varepsilon\sigma}{N} \cdot \sin\frac{N}{2}t \cdot \cos\left\{\left(n\lambda - \frac{n\beta + \sigma}{2}t\right) - \frac{\pi}{2}\right\}, \qquad (II_9)$$

worin $N = \sigma - n\beta$ gesetzt ist.

a) Für den Fall der Resonanz $\sigma = n\beta$ und $N = 0$ wird aus Gl. II_9 der Ausdruck

$$p = \ldots\ldots + \alpha\varepsilon\sigma \cdot t \cdot \cos\left\{(n\lambda - \sigma t) - \frac{\pi}{2}\right\}. \qquad (II_{10})$$

Diese Gleichung besagt, daß die Amplitude der Bodendruckwelle im Falle der Resonanz proportional mit der Zeit t wächst und die untere Bodendruckwelle gegenüber der primären oberen Welle um ein Viertel der

Wellenlänge vorauseilt, d. h. Rückwärtsneigung der Achse der Druckschwankung.

b) Für den Fall $\sigma \neq n\beta$ und $N \neq 0$ ergibt die Gl. II_{10} eine mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bodenwelle, die dem Mittelwert der Geschwindigkeiten der erzwungenen und freien Welle entspricht. Die Amplitude aber weist Schwebungen mit der Periode $\frac{2\pi}{N}$ auf, die um so länger sind, je kleiner der Unterschied zwischen σ und $n\beta$ ist.

Aus diesen Feststellungen resultiert die Tatsache der Vortäuschung langperiodischer Schwankungen der Amplitude neben den erzwungenen und freien Wellen und die Tatsachen der veränderlichen Lebensgeschichte einer Depression am Boden; verknüpft mit der unterschiedlichen Achsenlage der Druckstörungen.

III. Spezielle theoretische Behandlung einzelner Fälle mit verschiedener Annahme der Bodendruckverteilung zur Zeit $t = 0$.

Die Differentialgleichung II_4 läßt auch bei komplizierteren Anfangsbedingungen der Bodendruckverteilung noch geschlossene Lösungen zu. Drei solcher Fälle sind näher untersucht worden.

Fall 1. Unter Annahme eines Druckgefälles am Boden von den niedrigen nach den höheren Breiten zur Zeit $t = 0$ in der Form

$$p_0 = A + M \cos 2\varphi \qquad (III_1)$$

und der primären Welle in der Höhe H wie bisher erhält man eine geschlossene Lösung der Differentialgleichung in der Form

$$p = A + M \cos 2\varphi + \frac{\alpha - 2\frac{\gamma \cdot n}{\sigma} \cdot M}{1 - \frac{n\beta}{\sigma}} \cdot 2\sigma\varepsilon \sin \frac{N}{2} t \cdot$$

$$\cdot \cos\left\{\left(n\lambda - \frac{\sigma + n\beta}{2} t\right) - \frac{\pi}{2}\right\}. \qquad (III_2)$$

Diese Lösung zeigt keine wesentliche Änderung gegenüber der Lösungsgleichung II_9, nur kommt hier noch der Einfluß des vorgegebenen Bodendruckgefälles hinzu, das sich in der Größe der Amplitude der oberen und unteren Wellen äußert, wenn auch $\gamma \frac{n}{\sigma}$ stets eine kleine Größe ist. Die Winkelgeschwindigkeit $n\beta$ der freien Welle bleibt von dem vorgegebenen Bodenzustand unbeeinflußt und ist nur von den Verhältnissen in der Troposphäre diktiert.

Fall 2. Die Hinzunahme einer wellenförmigen Bodendruckverteilung der Form $C \cos m(\lambda + \psi)$ zur Zeit $t = 0$ liefert nichts Neues; zur Lösung tritt dann eine freie Welle der Form $C \cos m(\lambda + \psi - \beta t)$ hinzu. Gibt man aber eine bestimmte Anzahl m Zyklonen und Antizyklonen auf dem Erdumfang als Anfangsbedingung am Boden zur Zeit $t = 0$ durch die Annahme

$$p_0 = A + M \cos 2\varphi + C \sin 2\varphi \cos m(\lambda + \psi) \qquad (III_3)$$

vor, so läßt sich ebenfalls eine geschlossene Lösung finden, die folgende Form besitzt:

$$p = A + M\cos 2\varphi + \frac{\alpha - M\frac{\gamma n}{\sigma}}{1-\frac{n\beta}{\sigma}} \cdot \varepsilon \left\{ \cos(n\lambda - \sigma t) - \cos(n\lambda - n\beta t) \right\} +$$

$$+ C \cdot \sqrt{1 - \left[\cos 2\varphi - \frac{2\frac{\gamma n}{\sigma}\cdot\varepsilon}{1-\frac{n\beta}{\varepsilon}} \cdot \left\{ \cos(n\lambda - \sigma t) - \cos(n\lambda - n\beta t) \right\} \right]^2} \cdot$$

$$\cdot \cos m(\lambda - \beta t + \psi). \qquad (III_4)$$

Diese Lösung ist verhältnismäßig unübersichtlich und einen Einblick in ihr Wesen gestattet nur eine zahlenmäßige Auswertung für verschiedene Zeiten t. Das Ergebnis ist aber auch so schon überblickbar, da die bei einer zahlenmäßigen Berechnung der Bodendruckverteilung entstehenden Zyklonen bzw. Antizyklonen breitenparallel mit der Geschwindigkeit der freien troposphärischen Wellen ziehen und damit ist aus dieser Lösung kein Beitrag zur Klärung von Fragen der Steuerung zu erwarten; dasselbe gilt übrigens für die Lösung III_2 des Falles 1.

Fall 3. Der Fall 3 bietet mehr Interesse, da seine Annahme zur Zeit $t = 0$, nämlich die Vorgabe einer Rinne tiefen Druckes in 50° Breite mit Druckanstieg nach Norden und Süden in Anbetracht der Polarfronttheorie, die eine Rinne tieferen Druckes als Polarfront annimmt, den tatsächlich auf der Erde vorkommenden Verhältnissen recht gut gerecht wird.

Unter einer solchen Annahme der Bodendruckverhältnisse zur Zeit $t = 0$ in der Form

$$p_0 = A - M\sin(2\varphi - \psi); \qquad \varphi = \frac{1}{2}(90° + \psi) \qquad (III_5)$$

findet A. Defant folgende geschlossene Lösung für den Bodendruck:

$$p = A + M\sin\psi\cos 2\varphi + \frac{\alpha - 2M\sin\psi \cdot \frac{\gamma n}{\sigma}}{1-\frac{n\beta}{\sigma}} \cdot$$

$$\cdot \varepsilon \left\{ \cos(n\lambda - \sigma t) - \cos(n\lambda - n\beta t) \right\} - M\cos\psi \cdot \qquad (III_6)$$

$$\cdot \sqrt{1 - \left[\cos 2\varphi - \frac{2\frac{\gamma n}{\sigma}}{1-\frac{n\beta}{\sigma}} \cdot \varepsilon \left\{ \cos(n\lambda - \sigma t) - \cos(n\lambda - n\beta t) \right\} \right]^2}.$$

Diese Lösung läßt sofort aus der auftretenden Differenz der beiden cos-Wellen vermuten, daß sich die anfänglich angenommene Rinne tiefen Druckes in eine Reihe von nach Osten wandernden geschlossenen Tief- bzw. Hochdruckgebieten auflösen wird.

Vom Aufbau der Troposphäre unter Einfluß der erzeugenden primären Welle hängt es ab, ob diese Tief- und Hochdruckgebiete am Boden anwachsen oder absterben, ob eine Depression sich gewaltig vertieft oder ob sie nur eine flache Erscheinung im Druckfeld bleibt.

An Hand eines rechnerischen Beispieles unter weitgehend den tatsächlichen Verhältnissen der Erdatmosphäre angepaßten Annahmen wird dann dieser Fall ausgewertet und für verschiedene Zeiten (3., 6., 9., 12., 15. und 17. Tag) mit Hilfe der Gl. III_6 der Bodendruck berechnet. Die Ergebnisse ließen vermuten, daß eine eingehendere rechnerische Auswertung dieses Falles 3 mit noch passenderen Annahmen besseren Einblick in die Mechanik der Störungen des Bodendruckfeldes gestatten würde. Daher ist der Weg zu einer solchen Neubearbeitung des Falles 3 beschritten worden, der in dem folgenden Kapitel näher geschildert ist.

IV. Annahmen und Neuberechnung eines Falles mit Annahme einer Rinne tiefen Druckes in 50° Breite als Bodendruckverteilung zur Zeit $t = 0$ (Fall 3).

a) Annahmen.

A. Defant bemerkt selbst bei den Annahmen seines Zahlenbeispiels, daß man sich den Druckanstieg nach Norden, in der von ihm angenommenen meridionalen Druckverteilung (Rinne tiefsten Druckes in 60° nördlicher Breite) stärker wünschen würde.

Im Lehrbuch der Meteorologie von Hann-Süring, 5. Aufl., S. 256 sind folgende mittlere Luftdruckwerte im Meeresniveau wiedergegeben:

nördl. Breite	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	Mittel
mm Hg								
700 +	61,3	60,7	59,2	58,7	60,7	62,0	61,7	760,8

Diese gemittelten Werte stellen natürlich nicht den allgemeinen Zustand während des Ablaufes von Störungen im Luftdruckfeld zu einem bestimmten Zeitpunkt dar und es ist nicht angezeigt, diesen mittleren Zustand als Grundannahme zur Berechnung eines solchen Falles zu wählen. Vielmehr ist es wegen der bei der Entwicklung von Depressionen auftretenden starken Temperaturgegensätze in der Troposphäre und den damit verbundenen Druckgegensätze besser, zur Erzielung guter rechnerischer Ergebnisse eine schroffere mittlere meridionale Druckverteilung vorzugeben, wie dies ja A. Defant schon getan hat. Es soll aber die Rinne des tiefsten Druckes nicht in 60° Nordbreite, sondern ebenfalls mittleren Verhältnissen entsprechender in 50° Nordbreite gelegt werden. Die Entstehung der Zyklonen und ihre hauptsächlichen Zugbahnen halten sich im allgemeinen mehr an die geographische Breite 50°. Mit diesen Überlegungen ist nach der Gl. III_6 gewählt worden

$$A = 775 \text{ mm Hg}; \quad M = 16; \quad \psi = 10°.$$

Damit ergibt sich folgende mittlere meridionale Druckverteilung:

nördl. Breite	80°	75°	70°	65°	60°	55°
mm Hg 700 + ...	67,0	64,7	62,8	61,2	60,0	59,2

Breite	50°	45°	40°	35°	30°	Mittel
mm Hg 700 + ...	59,0*	59,2	60,0	61,2	62,8	761,5

Mit dieser Annahme ist auch dem gewünschten stärkeren Druckanstieg nach Norden Rechnung getragen.

Ebenfalls mittleren Verhältnissen entsprechend wählen wir nun (in Übereinstimmung mit A. DEFANT) folgende Verteilung des Höhendruckes in verschiedener geographischer Breite $p^{\circ}{}_{H} = 304 + 28 \cos 2\varphi$ in der Höhe $H = 7$ km unter Annahme von

nördl. Breite	80°	75°	70°	65°	60°	55°
mm Hg 200 + ...	77,68	79,75	82,55	86,00	90,00	94,44

Breite	50°	45°	40°	35°	30°	
mm Hg 200 + ...	99,13	104,00	108,87	113,56	118,00	

Mit diesen beiden Annahmen für p_0 und $p^0{}_H$ ergeben sich für $p_0/p^0{}_H$ folgende Werte:

n. Breite.	80°	70°	60°	50°	40°	30°	Mittel
$\frac{p_0}{p^0{}_H}$	2,762	2,699	2,621	2,538	2,460	2,399	2,505

Es lassen sich dann nach der barometrischen Höhenformel folgende Mitteltemperaturwerte in den einzelnen Breiten für die Schichte von 7 km Höhe berechnen:

Breite ...	80°	70°	60°	50°	40°	30°	Mittel
Tm (° C, abs.)	235,6	241,0	248,0	257,0	265,8	273,6	261,0 = −12° C

Wenn man nach HANN-SÜRING, Lehrbuch der Meteorologie, S. 197, folgende wirklich an der Erdoberfläche in verschiedener geographischer Breite beobachtete Bodentemperaturen annimmt, läßt sich eine recht vernünftige Temperaturverteilung in 7 km Höhe berechnen.

Breite	80°	70°	60°	50°	40°	30°
Boden	— 17,2	— 10,7	— 1,1	+ 5,8	+ 14,1	+ 20,4
7 km Höhe	— 57,6	— 53,3	— 48,1	— 37,8	— 28,5	— 19,2

Entsprechende Temperaturwerte in 7 km Höhe, die einer Darstellung von Palmén [*16*], die einen Meridianschnitt der Temperaturverteilung wiedergibt, entnommen sind, sind im Mittel der Monate Juli und Januar für die Höhe von 7 km besonders in den mittleren und niederen Breiten fast identisch mit den vorstehend berechneten Werten, in den hohen Breiten weisen Palméns Werte verständlicherweise höhere Werte auf, da er eine mehr gemittelte, also flachere Bodendruckverteilung zur Berechnung zugrunde legt.

Mit Hilfe dieser Grundannahmen für Bodendruck, Höhendruck (in 7 km) und Mitteltemperatur ergeben sich zur rechnerischen Auswertung der Lösungsgleichung III_6 folgende feste Werte.

Tabelle 1.

Bezeichnung	Erklärung	Numerischer Wert
p	Mittlerer Bodendruck	761,6 mm Hg
p_H	Mittlerer Höhendruck (7 km)	304,0 mm Hg
T_m, t	Mitteltemperatur der Schichte 0 bis 7 km Höhe	261 abs = — 12° C
$\frac{p}{p_H}$	Verhältnis der Mittelwerte des Boden- und Höhendruckes	2,505
A	Grundwert des Druckes	775 mm Hg
M	Amplitude des Gliedes der meridionalen Druckrinne	16
ψ	Phasenwinkel, der die Lage der Rinne in 50° Breite festlegt.	10°
$\sin \psi$		0,17365
$\cos \psi$		0,98481
$M \cdot \sin \psi$		2,7784
$M \cdot \cos \psi$		15.757

Um mehr Tief- und Hochdruckgebiete zur Untersuchung an der Hand zu haben, wählen wir $n = 8$, ε die Amplitude der oberen primären Druck-

Tabelle 2.

Bezeichnung	Erklärung	Numerischer Wert
n	Anzahl vollständiger Wellen auf einem Breitenkreis	8
ε	Amplitude der oberen primären Druckwelle	3 mm
ν	Koeffizient für das meridionale Gefälle in der Höhe	28
σ	Frequenz der oberen primären Druckwelle	$2{,}078 \times 10^{-5}$ [sec^{-1}]
$n\beta$	Frequenz der unteren freien Druckwelle	$2{,}9592 \times 10^{-5}$ [sec^{-1}]
$T_z = \frac{2\pi}{\sigma}$	Periode der erzwungenen Welle	3,5 Tage
$T_f = \frac{2\pi}{n\beta}$	Periode der freien Welle	2,5 Tage
$\alpha = \frac{p}{p_H} \cdot \frac{1}{1 + \frac{A g H}{c_p T}}$		1,987
$\beta = \frac{2\nu RT}{p_H \omega r^2} \frac{1}{1 + \frac{A g H}{c_p T}}$		$3{,}699 \times 10^{-6}$ [sec^{-1}]
$\gamma = \frac{RT}{p_H \omega r^2} \frac{1}{1 + \frac{A g H}{c_p T}}$		$6{,}606 \times 10^{-8}$ [sec^{-1}]
$\alpha - \frac{\frac{2\gamma n}{\sigma} \cdot M \sin\psi}{1 - \frac{n\beta}{\sigma}} \cdot \varepsilon$	Amplitude des 2. Gliedes der Lösungsgleichung	— 13,06
$\frac{\frac{2\gamma n}{\sigma}}{1 - \frac{n\beta}{\sigma}} \cdot \varepsilon$	Amplitude des Gliedes der zusammengesetzten cos-Wellen unter der Wurzel der Gleichung III_6	— 0,3599
$1 - \frac{n\beta}{\sigma}$		— 0,424

welle zu 3 mm, und für ν den gleichen Wert wie A. Defant, nämlich 28. Mit diesen Festsetzungen lassen sich alle fehlenden Konstanten der Lösungsgleichung III_6 bestimmen und diese sind in Tabelle 2 wiedergegeben. (Darin sind A das mechanische Wärmeäquivalent der Arbeit, g die Schwerebeschleunigung, R die Gaskonstante trockener Luft, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck, ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, r der Erdradius und $H = 7$ km.)

An Hand dieser ermittelten Zahlenwerte erkennt man, daß die obere Welle eine größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als die freie Welle besitzt. Es wird sich also die obere primäre Druckverteilung mit *größerer oder höchstens gleich großer* Geschwindigkeit wie die komplexe Druckverteilung am Boden nach Osten fortbewegen. Auf diese Tatsache wird besonders aufmerksam gemacht, da sie bei den Fragen der Steuerung später eingehender erörtert werden wird. Weiterhin erkennt man, daß die Amplitude der aus erzwungener und freier Welle zusammengesetzten Wellenkombination mit einem Wert von — 13,06 sehr groß ist und bei entsprechender Phasenlage der erzwungenen zur freien Welle erhebliche Druckänderungen in der anfänglichen meridionalen Verteilung (Rinne in 50° Breite) bewirken kann. Ebenso liefert das große Wurzelglied durch den Faktor $M \cos \psi = 15.757$ große Druckanteile. Wie in Gl. II_{10} festgestellt, weist die Amplitude Schwebungen mit der Periode $\frac{2\pi}{N}$ auf ($N = \sigma - n\beta$).

Diese Schwebungsperiode

$$S = \frac{2\pi}{N} = \frac{T_z \cdot T_f}{T_f - T_z}$$

ist abgesehen vom Vorzeichen genau 8,75 Tage. Nach 8,75 Tagen hat also das Bodendruckfeld wieder seine Anfangsform wie zur Zeit $t = 0$ in Form einer Rinne tiefen Druckes in 50° Breite mit ansteigendem Druck nach Norden und Süden erreicht. Von der Zeit $t = 0$ bis $t = 8{,}75$ Tage löst sich je nach der Phasenlage der Wellen, d. h. je nach Größe der auftretenden Schwebung die Anfangsdruckverteilung in eine Reihe nach Osten wandernder Hoch- und Tiefdruckgebiete auf.

Das sind die rein aus den numerischen Werten der Konstanten der Lösungsgleichung III_6 der Tabelle 1 und 2 sich ergebenden Folgerungen.

b) Rechnerische Auswertung.

Von den einzelnen Gliedern der Lösungsgleichung III_6 wurde zuerst das Glied $[\cos(n\lambda - \sigma t) - \cos(n\lambda - n\beta t)]$ für alle geographischen Längen λ von 5° zu 5° von $\lambda = 0°$ bis $\lambda = 45°$ und für alle Zeiten t von $t = 0$, 0,25, 0,5, 0,75 usf. bis $t = 8{,}75$ Tage ausgewertet. Über $\lambda = 45°$ hinaus war eine weitere Berechnung nicht nötig, weil $n \cdot \lambda = 8 \times 45° = 360° = 0°$ ist und sich also ab $\lambda = 45°$ alles wiederholt. Das gleiche gilt von der Zeit 8,75 Tage, in welcher, wie oben erwähnt, der Anfangszustand des Druckfeldes am Erdboden wieder erreicht ist. Die Genauigkeit der Berechnung der cos-Glieder wurde bis in die zweite Dezimale genau durchgeführt, wie überhaupt in der Gesamtberechnung die erste Dezimale

und damit die Zehntel der Luftdruckwerte immer als gesichert anzusehen sind, da alle Zahlen auf zwei Dezimalstellen genau bestimmt wurden.

Nacheinander erfolgte dann gliedweise die zahlenmäßige Auswertung aller Teilglieder der Lösungsgleichung III_6, welche für alle λ von 5° zu 5° von $\lambda = 0°$ bis $\lambda = 45°$, für alle Zeiten t von 0, 0,25, 0,5, 0,75 usf. bis 8,75 Tage und schließlich für alle geographischen Breiten φ von 5° zu 5° von $\varphi = 80°$ bis 30° Nordbreite berechnet wurden.

Als Endresultat der umfangreichen Zahlenrechnungen ergaben sich 35 Bodendruckkarten im Vierteltageabstand von $t = 0$ bis $t = 8{,}75$ Tage, die entsprechend den Fünfgradabständen von λ und φ ($\lambda = 0°$ bis 90°, $\varphi = 80°$ bis 30°) je 209 Luftdruckwerte enthalten.

Desgleichen führte die numerische Auswertung der Gl. II_3 für den Druck in der Höhe von 7 km

$$p_H = p^0{}_H + \nu \cos 2\varphi + \varepsilon \cos (n\lambda - \sigma t)$$

für alle t, φ und λ wie oben zu derselben Anzahl von 35 Höhendruckkarten mit gleichfalls je 209 Luftdruckwerten. Da hierbei lediglich die Summe zweier cos-Funktionen vorliegt, genügt die Zeichnung einer Höhendruckkarte, die in ihrer Gesamtheit für andere Zeiten t jeweils um einen entsprechenden Betrag von λ phasenverschoben ist.

Dabei werden die um 3,5 Tage verschiedenen Karten identisch, z. B. die Karte des Anfangstages (0. Tages) identisch derjenigen des 3,5ten und des 7. Tages.

Schließlich wurden unter Verwendung der so errechneten Bodendruck- bzw. Höhendruckwerte nach der barometrischen Höhenformel in der Form

$$T_m = -\frac{gH}{R} \frac{\lg e}{\lg \frac{p_H}{p}} = -\frac{C}{\lg \frac{p_H}{p}} = -\frac{103{,}94}{\lg \frac{p_H}{p}}.$$

35 Karten der Mitteltemperaturen gerechnet.

Zum Verständnis und zur Diskussion genügt die Wiedergabe von 9 Bodendruckkarten für die vollen Tage 0 bis 8 und entsprechende 9 Karten der Mitteltemperaturen zwischen Boden und 7 km Höhe.

c) Diskussion der Karten.

0. Tag. Die Bodendruckkarte des Anfangstages zeigt gemäß der Voraussetzung eine Rinne tiefen Druckes (759 mm Hg) in 50° Breite, die durch zwei Isobaren von 760 mm Hg in 40° bzw. 60° Breite markiert ist. In 80° Breite ist der Druck 766,9, in 30° Breite nur 762,6 mm Hg.

1. Tag. Die Karte des 1. Tages zeigt die Auflösung der Rinne tiefen Druckes in je zwei Hoch- und Tiefdruckgebiete (gemäß der Wahl von $n = 8$, d. h. 8 vollständige Wellen auf einem ganzen Breitenkreis). Dabei zeigen die Tiefdruckgebiete geschlossene ellipsenförmige Isobarenformen, in der Karte des 1. Tages bereits durch eine geschlossene 750 mm-Isobare markiert und einen gegenüber dem tiefsten Druck in der ursprünglichen Rinne von 759,0 mm bereits um zirka 10 mm herabgeminderten Druck von zirka 749,1 mm Hg im Zentrum. Gleichfalls bemerkt man schon bei

flüchtiger Betrachtung der Karten, daß das Zentrum der Tiefdruckgebiete gegenüber der Rinne nach Norden verschoben ist, also nördlich von 50° Breite liegt (in zirka 57° Breite). Die Hochdruckgebiete zeigen keine geschlossenen Isobarenformen, sondern sind eher als Hochdruckrücken zu bezeichnen, welche zwei Hochdruckkerne in 80° bzw. 30° Breite verbinden. Der höchste Druck liegt dabei in 80° Breite ($>$ 792 mm Hg), während das Hochdruckgebiet in 30° Breite nur einen Wert von $>$ 770 mm Hg aufweist.

Die Tief- und Hochdruckgebiete sind zu einer senkrechten Achse durch das Zyklonenzentrum (in der Darstellung gestrichelte Linie) vollkommen symmetrisch aufgebaut.

2. Tag. Die Karte des 2. Tages zeigt ein bereits wesentlich verdichtetes Isobarenbild, was einerseits durch Vertiefung der zwei Zyklonen, anderseits durch weiteres Anwachsen des Druckes der zwei Hochdruckgebiete entsteht.

Das Zentrum der Zyklone, markiert durch die 750 mm Isobare, hat sich bis auf Werte von zirka 741 mm Hg vertieft und ist jetzt wieder weiter nördlich in zirka 65° Breite zu finden. Schon jetzt läßt die kritische Verfolgung des Isobarenverlaufes um das Zentrum der Zyklone herum erkennen, daß sich wohl das Zentrum selbst nach Norden verlagert, nicht aber die gesamte Zyklone, die eine Ausweitung ihres Bereiches nach Norden und Süden zeigt. Diese Tatsache soll ebenfalls später bei den Fragen der Steuerung nähere Behandlung und Beachtung finden.

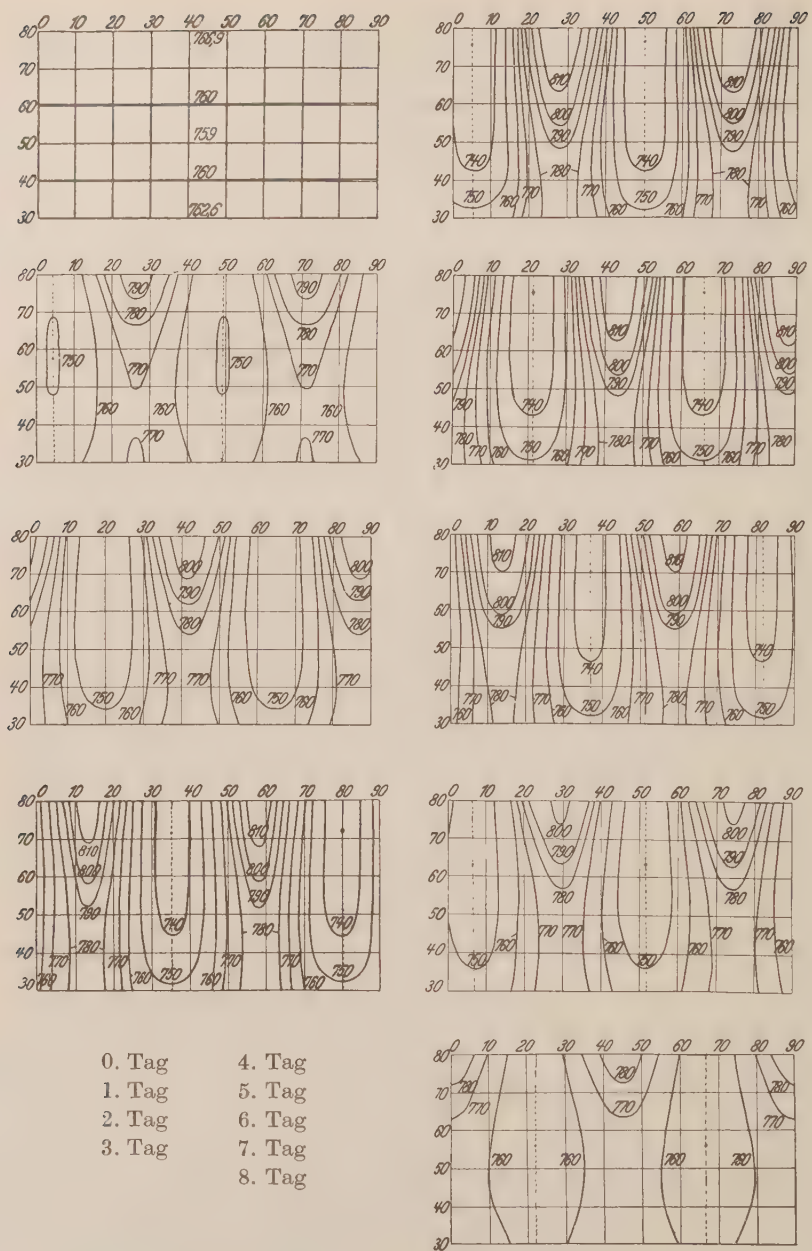
Gemäß der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen haben sich auch die Zyklonen bzw. Antizyklonen von Westen nach Osten verlagert.

3. Tag. Der 3. Tag zeigt dieselben Erscheinungen, wie Verdichtung des Isobarenfeldes, weitere Vertiefung und Ausweitung der Zyklonen, weitere Verschiebung des Zentrums (zirka 734 mm Hg in 72° Breite) nach Norden, wenn auch nicht mehr so stark wie an den Vortagen. Die Hochdruckgebiete zeigen entsprechend weitere Erhöhung, wobei sich der höchste Druck stets streng an die Nord- bzw. Südbegrenzung der Karten (80° bzw. 30° Breite) hält und das Hoch im Norden stets stärker ist.

Auch die Fortbewegungen der Störungen nach Osten ist stetig gegenüber den Vortagen vor sich gegangen, wie man an der Verlagerung der zentralen Achsen durch die Zyklonen leicht feststellen kann.

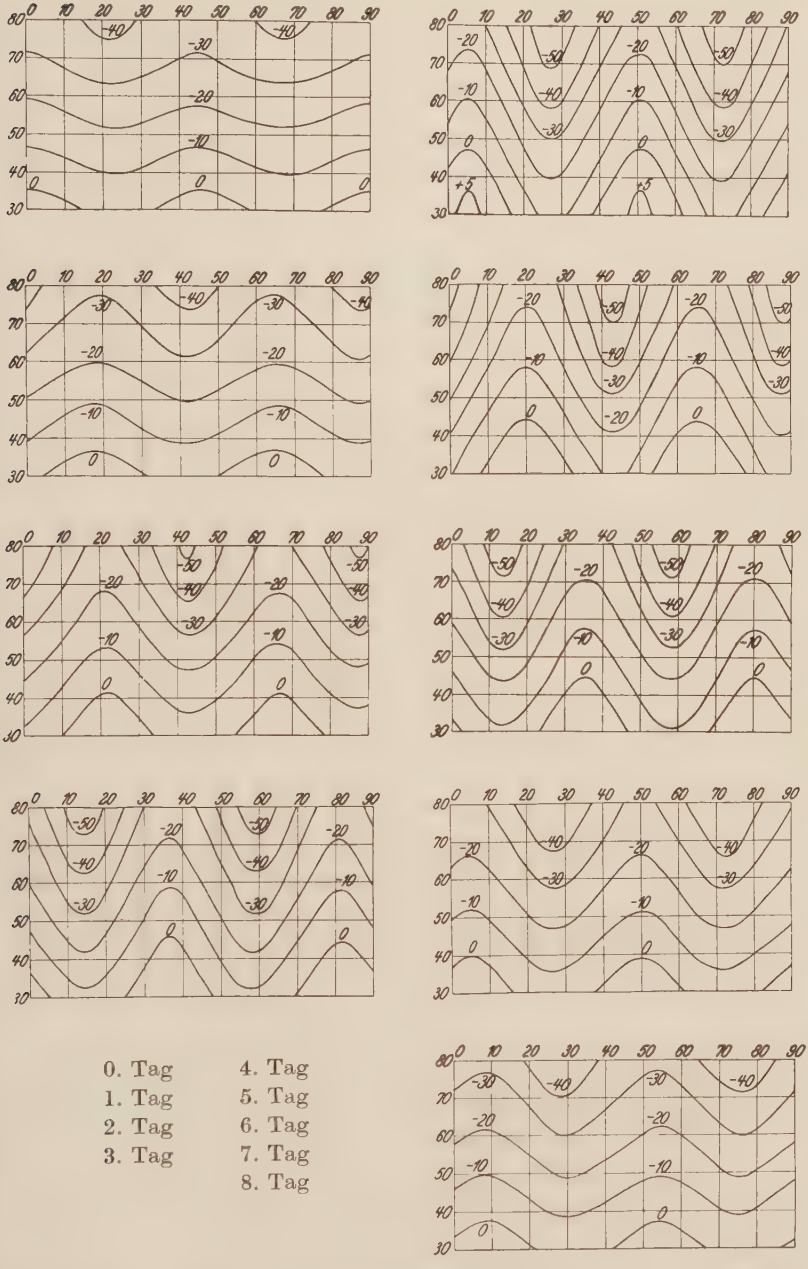
4. Tag. Der 4. Tag zeigt weitere Verschärfung der Druckgegensätze. Analog zu der Entwicklung an den Vortagen, Ausweitung der Zyklonen und Wanderung nach Norden bzw. Vertiefung des Zentrums (zirka 731 mm Hg in zirka 77° Breite). Dabei ist ein Zyklonenzentrum rechts aus dem Kartenbild ausgewandert und am 4. Tag links wieder ein ihm entsprechendes in das Kartenbild eingetreten, was die weitere Bewegung des Störungssystems am Boden von Westen nach Osten erkennen läßt.

5. Tag. Wie bereits oben erwähnt, erreicht die Druckverteilung am Boden nach 8,75 Tagen ihren Ausgangszustand des Anfangstages wieder, demnach nach genau 4,375 Tagen ihre maximale Störungsintensität. Diese Zeit liegt also zwischen dem 4. und dem 5. Tag und dies kommt sofort in der 5. Tageskarte zum Ausdruck. Die Druckwerte der Tief-



0. Tag
1. Tag
2. Tag
3. Tag
4. Tag
5. Tag
6. Tag
7. Tag
8. Tag

Abb. 1. 9 Bodendruckverteilungen der Tage 0 bis 8 des Falles 3. (Isobarenabstand von 10 zu 10 mm Hg, nach $\lambda = 90^0$ wiederholt sich die Druckverteilung in derselben Weise; die gestrichelte Linie ist die meridionale Achse durch die Zyklone und der Punkt ist das Zyklonenzentrum.)



0. Tag
1. Tag
2. Tag
3. Tag
4. Tag
5. Tag
6. Tag
7. Tag
8. Tag

Abb. 1a. 9 Mitteltemperaturkarten des Falles 3. (Mitteltemperatur zwischen Boden und 7 km Höhe; Isothermenabstand von 10 zu 10 Grad C.)

druckkerne haben wieder zugenommen (zirka 732 mm Hg in zirka 76° Breite) und das Zentrum selbst hat sich, wenn auch noch gering, nach Süden verschoben. Also ist anzunehmen, daß es am 4,375 Tag seine nördlichste Lage erreicht hatte und danach sich südwärts verlagert hat.

Dementsprechend haben auch die Druckwerte der Hochdruckgebiete etwas abgenommen. Die Fortbewegung nach Osten ging unverändert weiter.

6., 7., 8. Tag. Der folgende 6. und 7. Tag zeigt die unveränderte Weiterentwicklung der Entwicklungstendenz des 5. Tages, also eine Zyklonenbewegung südwärts. Der Gradient lockert sich, die Intensität der Störungen nimmt ab und das Zentrum der Zyklone verlagert sich südwärts. Der 8. Tag zeigt, ähnlich wie der 1. Tag, die rasche Annäherung an die Ausgangsverteilung, wobei das Zentrum der Zyklone in zirka 55° Breite liegt und die Zyklone selbst nur noch durch eine Isobare von 760 mm markiert ist. Nach 8,75 Tagen ist der Grundzustand des Anfangstages erreicht, die Zyklonen und Antizyklonen haben sich aufgelöst und es besteht der Zustand der Rinne tiefen Druckes in 50° Breite gemäß der Karte des 0. Tages.

Als abschließendes Ergebnis der Diskussion der Bodendruckkarten kann festgestellt werden:

1. Es findet eine Auflösung der Rinne tiefen Druckes in Maxima und Minima statt und nach maximalem Entwicklungsstand am 4,375 Tag eine Auflösung derselben, bis wieder am 8,75 Tag das Bild des 0. Tages erreicht wird.

2. Es erfolgt eine Verlagerung des Zentrums der Minima im vertiefenden Entwicklungsstadium nach Norden, im auffüllenden Stadium nach Süden.

3. Im vertiefenden Stadium ist mit der Nordverlagerung des Zentrums *keine* Nordverlagerung der Gesamtzyklone verbunden bzw. beim auffüllenden Stadium mit der Südverlagerung des Zentrums *keine* solche der Gesamtzyklone. Sondern im vertiefenden Stadium weitet sich der Zyklonenbereich unter Einbeziehung immer größerer Flächen in seiner ellipsenförmigen Isobarengestaltung mehr und mehr aus und im auffüllenden Stadium zieht er sich entsprechend dem Ausatmen einer Lunge zusammen.

4. Es verbleiben die Kerne hohen Druckes, von denen es stets zwei gibt, immer in den Breiten 80° bzw. 30°, wobei der nördliche Kern des Maximums in 80° Breite stets höheren Druckwert besitzt als derjenige in 30° Breite.

5. Es wandert das Gesamtstörungsbild der Bodenkarte mit stets gleichbleibender Geschwindigkeit nach Osten, wobei die Tief- und Hochdruckgebiete stets symmetrisch zu einer meridionalen Linie durch das Zentrum der Zyklonen angeordnet sind.

Es erhebt sich nun die Frage, die bereits über die Untersuchung von A. Defant hinausgeht, nach der genauen Gestaltung der Bahn dieser

festgestellten Bewegung des Zyklonenzentrums und daraus wieder die weitere Frage, welche Ursachen für diese Bewegung vorhanden sind und ob eine troposphärische untere oder eine stratosphärische obere Ursache für diese Bewegung besteht.

Die rein aus der Zeichnung der Karten nach Augenmaß ermittelte Zentrumslage der Zyklone an den verschiedenen Tagen liefert folgende Bahn des Depressionszentrums in ausgeglichener Form.

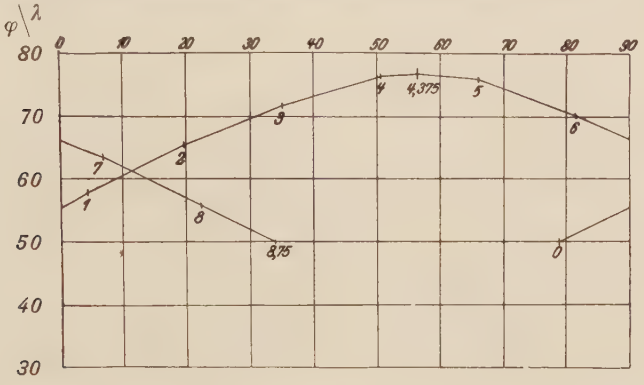


Abb. 2. Bahn des Zentrums der Bodentiefdruckgebiete des Falles 3. (Zentrumslage ist den 9 Bodendruckkarten entnommen.)

Wir wollen nun im Folgenden auch von der theoretischen Seite diese Bewegung des Zyklonenzentrums behandeln und versuchen, einen Aufschluß über die Entstehungsursache dieser Bewegung zu erhalten.

V. Theoretische Untersuchung der Bewegung des Zentrums der Bodenstörungen und Behandlung der Frage der Steuerung des Falles 3.

Ist der Druck $p = F(\varphi, \lambda, t)$ und $\varphi = F_1(t)$ und $\lambda = F_2(t)$, wobei F_1 und F_2 beliebige Funktionen von t sein können, dann ist die Bedingung dafür, daß p ein Maximum bzw. Minimum wird, gegeben durch

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \text{ und } \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0. \tag{V_1}$$

Differenziert man die Lösungsgleichung III_6 partiell nach φ und λ und setzt die sich ergebenden Ausdrücke gleich Null, dann erhält man nach leichter Zwischenrechnung drei Gleichungen

$$-2M \sin 2\varphi = 0. \tag{V_2}$$

$$\left[\sin\psi + \frac{\cos\psi \cdot [\ldots\ldots]}{\sqrt{1-[\ldots\ldots]^2}}\right] = 0. \tag{V_3}$$

$$[\sin(n\lambda - \sigma t) - \sin(n\lambda - n\beta t)] = 0. \tag{V_4}$$

worin die Klammer

$$[\ldots\ldots\ldots] = \cos 2\varphi - \frac{2\,\frac{\gamma n}{\sigma}}{1 - \frac{n\beta}{\sigma}} \cdot \varepsilon \left\{\cos(n\lambda - \sigma t) - \cos(n\lambda - n\beta t)\right\}$$

bedeutet.

Die Gleichung V_2 liefert, wie leicht einzusehen, eine Bedingung für die geographische Breite des Zentrums der Hochdruckgebiete φ_H. Es ist somit

$$2\varphi_H = 0° \text{ oder } \pi;\ \varphi_H = 0° \text{ oder } \frac{\pi}{2} = 90°. \qquad (V_5)$$

φ_H ist unabhängig von der Zeit t und damit verbleibt das Zentrum der Hochdruckgebiete immer in einer Breite 0° (Äquator) oder 90° (Pol). Diese Tatsache wird durch die Karten der Bodendruckverteilung vollauf bestätigt, genau so wie es stets zwei Hochdruckkerne gibt. (Siehe S. 168, Ziffer 4.) Die Gl. V_4 läßt sich mit $N = \sigma - n\beta$ umformen in

$$-2 \sin \frac{N}{2} t \cdot \cos\left[n\left(\lambda - \frac{\beta + \frac{\sigma}{n}}{2} t\right)\right] = 0.$$

Daraus folgt $n\left(\lambda - \frac{\beta + \frac{\sigma}{n}}{2} t\right) = \frac{\pi}{2}$ oder ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$. Diese Beziehung ergibt die geographische Länge der Hochdruckgebiete λ_H in Abhängigkeit von der Zeit t in der Form

$$\lambda_H = \frac{\pi}{2n} + \frac{\beta + \frac{\sigma}{n}}{2} t. \qquad (V_6)$$

Diese Gleichung ist die Gleichung einer Geraden, d. h. das Zentrum der Hochdruckgebiete bewegt sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit von Westen nach Osten. Diese Tatsache ist ebenfalls bereits erwähnt (siehe S. 168, Ziffer 5).

Wegen $n = 8$ [acht vollständige Wellen auf einen Breitenkreis (2π)] ist in bezug auf die geographische Länge das Zentrum des Hochdruckgebietes gegen das Zentrum des Tiefdruckgebietes um den Betrag $\frac{2\pi}{2n}$ verschoben.

Damit wird die geographische Länge des Zentrums der Tiefdruckgebiete in Abhängigkeit von der Zeit t

$$\lambda_T = -\frac{2\pi}{2n} + \frac{\beta + \frac{\sigma}{n}}{2} t, \qquad (V_7)$$

d. h. auch das Zentrum der Tiefdruckgebiete bewegt sich mit stets gleichbleibender Geschwindigkeit von Westen nach Osten. Auch diese Tat-

sache ist bereits erwähnt (siehe S. 168, Ziffer 5). Die Neigung der beiden Geraden V_6 und V_7 berechnet sich zu

$$\operatorname{tg} \alpha = 15.586 \text{ und } \frac{\pi}{2n} = 11{,}25°. \qquad (V_8)$$

Nachstehende Abbildung 3 zeigt die Kurven für λ_H und λ_T als Funktion der Zeit t.

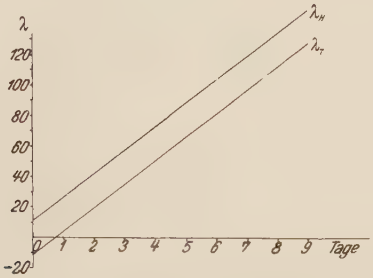


Abb. 3. Die geographische Länge des Zyklonenzentrums (λ_T) und des Antizyklonenzentrums (λ_H) des Falles 3 in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen).

Und schließlich liefert die Gl. V_3 eine Bedingung für die geographische Breite der Tiefdruckgebiete φ_T.

Unter Verwendung von $N = \sigma - n\beta$ und $C = \dfrac{2\dfrac{\gamma n}{\sigma}}{1 - \dfrac{n\beta}{\sigma}} \cdot \varepsilon$ und der Formel $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ gelangt man zu einer Beziehung

$$\frac{\cos 2\varphi + 2C \sin\dfrac{N}{2} t}{\sqrt{1 - \left[\cos 2\varphi + 2C \sin\dfrac{N}{2} t\right]^2}} = -\operatorname{tg}\psi. \qquad (V_9)$$

Quadrieren wir diese Gleichung, so ergibt sich nach einer kleinen Umformung für φ_T

$$\varphi_T = -2C \sin\frac{N}{2} t - \sin\psi; \quad C = \frac{2\dfrac{\gamma n}{\sigma}}{1 - \dfrac{n\beta}{\sigma}} \cdot \varepsilon, \qquad (V_{10})$$

d. h. die Veränderung der geographischen Breite φ_T des Zentrums der Druckminima läßt sich gemäß V_{10} durch eine Kurve darstellen, die ihren größten bzw. kleinsten Wert zu den Zeiten $t = \dfrac{2\pi}{2N}$ und $t = 0$ hat.

Mit dem vorgegebenen Wert $\psi = 10°$ wird für $t = 0$, $\varphi_T = 50°$ für $t = \dfrac{2\pi}{2N}$, $\varphi_T = 76°\ 39'$, d. h. das Zyklonenzentrum bewegt sich von einer Breite 50° zur Zeit $t = 0$ (das ist die Tiefdruckrinne) bis zu einer Breite 76° 39′ zur Zeit $\dfrac{2\pi}{2N} = 4{,}375$ Tage.

Auch diese Tatsache findet damit ihre restlose theoretische Erklärung (siehe S. 168, Ziffer 1 und 2). Nachstehende Abbildung zeigt die Auswertung der Gleichung V_{10}.

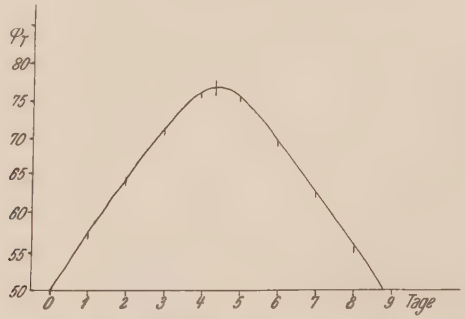


Abb. 4. Die geographische Breite des Zyklonenzentrums (φ_T) des Falles 3 in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen).

Es interessiert nun schließlich noch die Beziehung zwischen φ_T und λ_T der Breite bzw. Länge des Tiefdruckzentrums, also die Bahn der Zyklone. Aus den Bestimmungsgleichungen V_7 und V_{10} erhält man nach Elimination der Zeit t und mit $\sigma = \frac{2\pi}{T_z}$ und $n\beta = \frac{2\pi}{T_f}$ (siehe Tabelle 2) die Bahngleichung der Zyklone zu

$$\cos 2\varphi_T = 2C \sin \frac{T_z - T_f}{T_z + T_f}\left(n\lambda_T + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\psi;\quad C = \frac{2\frac{\gamma n}{\sigma}}{1 - \frac{n\beta}{\sigma}} \cdot \varepsilon. \quad (V_{11})$$

Je nachdem $\sin \frac{T_z - T_f}{T_z + T_f}\left(n\lambda_T + \frac{\pi}{2}\right)$ gleich 1 oder 0 ist, d. h.

$$\frac{T_z - T_f}{T_z + T_f}\left(n\lambda_T + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \text{ usw. oder } 0, \pi, 2\pi \text{ usw.}$$

ist, erreicht die der Gl. V_{11} entsprechende Kurve ihren höchsten bzw. niedrigsten Wert oder die Bahn des Tiefdruckzentrums ihren nördlichsten bzw. südlichsten Punkt.

Eine zahlenmäßige Auswertung der Gl. V_{11}

$$\cos 2\varphi = -0{,}7198 \cdot \sin 0{,}1667\ (8\lambda + 90°) - 0{,}17365$$

ergibt folgende Tabelle 3.

Tabelle 3.

λ	φ	λ	φ	λ	φ
— 11,25	50,0	40	73,7	80	70,9
0	55,5	50	76,17	90	66,55
10	60,5	56,23	76,65	100	61,75
20	65,35	60	76,5	110	56,8
30	69,85	70	74,5	123,75	50,0

Man beachte die völlige Übereinstimmung mit der auf praktischem zeichnerischem Wege gewonnenen Kurve der Abbildung 2.

Demnach stimmt die auf theoretischem Wege gewonnene Gleichung der Bahn des Zyklonenzentrums in allen Punkten mit den aus den Berechnungen und Zeichnungen gezogenen Schlüssen (S. 168, Ziffer 1 bis 5) überein. Weiterhin geht aber aus der Lösungsgleichung V_{11} hervor, daß der Verlauf der Bahn sowohl in bezug auf die Amplitude als auch in bezug auf die Phase von den Perioden T_z und T_f, d. h. von den Perioden der erzwungenen bzw. freien Welle abhängig ist, also nicht nur allein einer Beeinflussung von oben her unterliegt, sondern auch vom Aufbau der Troposphäre abhängig ist.

Wie aber schon oben erwähnt, kann, da sich nur das Zentrum, nicht aber die Gesamtzyklone auf einer gewissen gesetzmäßigen Bahn bewegt, *nicht* von einer Steuerung der Störung im üblichen Sinne gesprochen werden, was recht deutlich aus der Abbildung 5 hervorgeht.

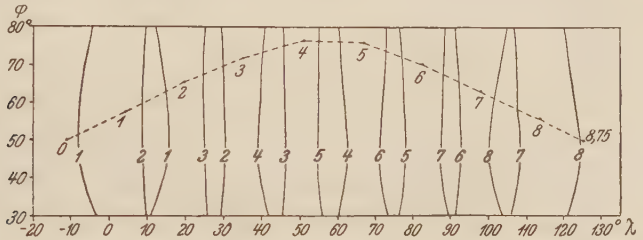


Abb. 5. Zentrumsbahn (gestrichelt) des Falles 3 und Gesamtbereich des Bodentiefdruckgebietes (dargestellt durch Verfolgung der Isobare von 760 mm Hg) durch alle Tage 0 bis 8,75 (zusammengehörige Isobaren und Zentrum sind gleich beziffert).
Das Zyklonenzentrum verlagert sich stark in meridionaler Richtung, während der Gesamtbereich der Zyklone mehr oder weniger breitenparallel bleibt.

Zur Frage der Steuerung ist also kein Aufschluß aus dieser Bearbeitung des Falles 3 zu erwarten.

Bis jetzt wurden also drei Fälle, d. h. drei Grundannahmen der Bodendruckverteilung zur Zeit $t = 0$ behandelt:

1. $p_0 = A + M \cos 2\varphi$, (Fall 1, Gl. III_1)

d. h. eine gleichmäßige Druckabnahme von den niedrigen nach den höheren Breiten.

2. $p_0 = A + M \cos 2\varphi + C \sin 2\varphi \cos m(\lambda + \psi)$, (Fall 2, Gl. III_3)

d. h. es treten zur anfänglichen Druckverteilung des Falles 1 noch die Anzahl von m Zyklonen und Antizyklonen hinzu und

3. $p_0 = A - M \sin(2\varphi - \psi)$, (Fall 3, Gl. III_5)

d. h. eine vorgegebene Rinne tiefen Druckes in mittlerer Breite zur Zeit $t = 0$; gegen Norden bzw. Süden steigt der Druck an.

Für alle diese Grundannahmen wurden theoretische Lösungen gefunden, die besonders für den Fall 3 rechnerisch ausgewertet und bis

ins Detail behandelt wurden, um bei einer rinnenförmigen Verteilung des Druckes als Grundzustand eine genaue Orientierung über das Entstehen, Vergehen und die Entwicklung der atmosphärischen Störungen zu erhalten.

Man erwartete nun, wenn man zur anfänglichen Druckverteilung (Rinne in 50° Breite) des Falles 3 noch eine Reihe von Zyklonen und Antizyklonen hinzufügt, ähnlich der Grundannahme des Falles 2, wo zur einfachen Abnahme des Druckes von Süden nach Norden auch eine Reihe von m Zyklonen und Antizyklonen hinzugefügt wurden, daß durch eine solche Annahme, falls eine Lösung möglich, doch die entstehenden Störungen sich in Bahnen bewegen würden, die mehr Aufschluß zur Frage de Steuerung geben könnten.

VI. Theorie und Berechnung im Falle der Vorgabe einer Reihe von Zyklonen und Antizyklonen als Bodendruckverteilung zur Zeit $t = 0$ (Fall 4).

Es sei also zur Zeit $t = 0$

$$p_0 = A - M \sin(2\varphi - \psi) + C \sin 2\varphi \cos m(\lambda - \psi). \qquad (\mathrm{VI}_1)$$

Man findet analog zu dem Lösungsgang des Falles 3 auch für diese Grundannahme eine in sich geschlossene Lösung der Differentialgleichung II_4. Man erhält die gleiche Lösung wie bei Fall 3 (III_4), zu der noch ein Glied, welches von der zusätzlichen Annahme von m Zyklonen und Antizyklonen zur Rinne tiefen Druckes zur Zeit $t = 0$ herrührt. Die Lösung lautet:

$$p = \text{Lösung } \mathrm{III}_6 +$$

$$+ C \cdot \sqrt{1 - \left[\cos 2\varphi - \frac{2\gamma n}{1 - \frac{n\beta}{\sigma}} \cdot \varepsilon \{\cos(n\lambda - \sigma t) - \cos(n\lambda - n\beta t)\}\right]^2} \cdot$$

$$\cdot \cos m(\lambda - \beta t) + \chi. \qquad (\mathrm{VI}_2)$$

Demnach bietet die Lösung an und für sich nichts Neues.

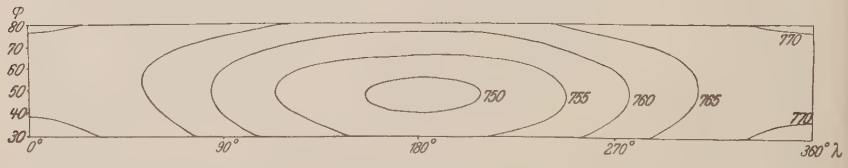


Abb. 6. Bodendruckverteilung des Falles 4 am Anfangstag $t = 0$. (Eine einzige Zyklone und Antizyklone auf einem Erdumfang [360°] Isobarenabstand von 5 zu 5 mm Hg.)

Diese Lösung wurde gleichfalls für $C = 10$ und $m = 1$ rechnerisch für alle λ von 0° bis 360° und alle φ von 30° bis 80° Breite für die drei Zeiten $t = 0$, $t = 1{,}25$, $t = 2{,}5$ Tage ausgewertet. Dieser Fall zeigt also zur Zeit $t = 0$ eine Zyklone und Antizyklone auf dem Erdumfang, die sich als Superposition der Rinne tiefen Druckes in 50° Breite und einer Welle ($m = 1$) ergibt. Die Abbildung 6 zeigt diese Grundannahme zur Zeit des 0. Tages.

Die Abbildungen 7 und 7a zeigen die Auflösung des im wesentlichen einfachen Grundzustandes in eine Reihe ($n = 8$) von acht Zyklonen bzw. Antizyklonen für die Tage 1,25 und 2,5.

Man erkennt, daß die Zentren der Depression am Boden alle verschieden hoch liegen und nicht mehr wie im Falle 3 auf jeder Tageskarte untereinander gleiche Breitenlage besitzen. Überhaupt bewirkt die Änderung des Grundzustandes, den die Abbildung 6 zeigt, eine unsymmetrische Auflösung in Einzelstörungen an den Folgetagen, was ja durchaus verständlich ist.

Verfolgt man aber eine bestimmte Störung von Tag zu Tag, so vollführt das Zentrum eine gleiche Bahnbewegung wie im Falle 3 unter denselben Erscheinungen des Ausweitens und Vertiefens bzw. Zusammen-

Abb. 7 und 7a. Bodendruckverteilungen des Falles 4 am 1,25 und 2,5ten Tag. (Auflösung der Anfangsdruckverteilung der Abb. 7 in je 8 Hoch- und Tiefdruckgebiete; Isobarenabstand von 10 zu 10 mm Hg; zu jeder Druckangabe sind 700 mm Hg zu addieren.)

schrumpfens und Auffüllens der Störung, ohne daß sich die Gesamtstörung nach Norden bzw. nach Süden verlagert.

Es bewirkt demnach die Vorgabe troposphärisch-großräumiger Tief- und Hochdruckgebiete als Grundzustand keine steuernde Bewegung des Gesamtbereiches der Zyklonen und Antizyklonen an den Folgetagen. Wohl bewegt sich das Zentrum der Zyklone, während die Hochdruckzentren überhaupt nur in einer Breite verbleiben, aber es verschieben sich nicht die Gesamtstörungsgebiete nord- bzw. südwärts, sondern lediglich breitenparallel westostwärts.

Auch aus dieser Annahme ist kein wesentlicher Beitrag zur Frage der Steuerung zu erwarten gewesen, daher wurde von einer rechnerischen Auswertung für die weiteren Tage Abstand genommen.

Aus den Ergebnissen der vielen theoretischen und praktischen Untersuchungen über die Frage der Bewegungsbeeinflussung der troposphärischen Störung im Luftdruckfeld ist zu entnehmen, daß nur stationäre oder quasistationäre Tief- und Hochdruckgebiete *in der Höhe*, also sehr hoch reichende Druckgebilde, in der Lage sind, stärkere Bewegungsbeeinflussung der troposphärischen Störungen zu erzielen.

Es ist weiterhin einzusehen, daß bei einer schnelleren Fortbewegung der oberen primären Druckwellen gegenüber den unteren troposphärischen Wellen, diese raschen, kurz dauernden Bewegungsänderungen unterworfen sein werden, die sich in ihrer Gesamtheit eben nicht als einheitliche augenscheinliche Bewegungsänderung der troposphärischen Störungen äußern, sondern sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben werden.

In den vorstehend behandelten Beispielen und Fällen war aber stets σ, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der oberen Druckwellen, größer als jene der freien Wellen $n\beta$, und auch stets größer als eine Kombination zwischen σ und $n\beta$, mit der sich die Bodendruckverteilung fortbewegt.

Weder die Vorgabe eines meridionalen Druckgefälles, einer Rinne tiefen Druckes in 50° Breite, noch die Vorgabe einer großräumigen Anordnung von Tief- und Hochdruckgebieten zur Zeit $t = 0$ am Boden war imstande, wie die bisherige Untersuchung eindeutig zeigt, eine steuernde Bewegung im Sinne einer Gesamtverlagerung der Störungen am Boden nord- bzw. südwärts zu erzeugen.

Es ist daher naheliegend, eine Änderung der Grundannahmen zur besseren Untersuchung der Frage der Steuerung durchzuführen und in der Höhe eine sich nur langsam gegenüber den troposphärischen Wellen fortbewegende, mehr oder weniger quasistationäre Druckwelle vorzugeben, in der Hoffnung, daß die rascher laufenden unteren Wellen einer stetigen in einer Richtung verlaufenden Beeinflussung durch eine solche obere Druckverteilung unterliegen werden, die eine Verlagerung oder Steuerung der Gesamtstörungen zur Folge hat.

Es wurde daher eine neue Grundannahme in folgender Weise vorgenommen:

1. Annahme einer Druckwelle in der Höhe H, die äußerst langsam fortschreitet, zur guten Nachahmung eines fast stationären Zustandes in der Stratosphäre.

2. Die Annahme einer Rinne tiefen Druckes in 50° Breite am Boden, überlagert von zwei zusätzlichen freien troposphärischen Wellen, deren eine sich mit einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit von $8\,\beta$ rasch im Gegensatz zur oberen primären Druckwelle fortbewegt, deren andere eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit $2\,\beta$ besitzt, die in dieser Art gewählt wurde, um eine bessere Anpassung der Temperaturverhältnisse in der Troposphäre an die tatsächliche Temperaturverteilung in der Troposphäre zu gewährleisten. Die Amplituden der oberen bzw. die der unteren Wellen lassen wir uns vorläufig noch völlig frei.

Diese durch die Überlagerung einer Rinne tiefen Druckes und der beiden freien troposphärischen Wellen entstehende Grundannahme der Druckverteilung am Boden zur Zeit $t = 0$ äußert sich in einer Reihe von rasch, im Vergleich mit der langsamen oberen Welle, sich fortbewegenden Bodendruckstörungen; eine Erscheinung, die wir ja erzielen wollten.

VII. Der Fall einer quasistationären Höhendruckverteilung und rasch wandernder Bodendruckstörungen. (Fall 5.) Theorie dieses Falles 5.

Entsprechend den vorstehenden Ausführungen machen wir nun für den Druck in der Höhe H folgende Annahme:

$$p_H = p_H^0 + \nu \cos 2\varphi + C \cos (2\lambda - \sigma t), \qquad (\text{VII}_1)$$

d. h. der Höhendruck p_H setzt sich zusammen aus dem mittleren Druck in der Höhe 7 km p_H^0, dem meridionalen Gefälle in der Höhe H festgelegt durch $\nu \cos 2\varphi$, und einer mit der Winkelgeschwindigkeit σ nach Osten fortschreitenden Druckwelle $C \cos (2\lambda - \sigma t)$. Diese Welle soll nun wesentlich langsamer sich fortbewegen und habe wegen $n = 2$ nur zwei vollständige Wellen auf einem Breitenkreise.

Mit dieser Annahme für p_H läßt sich eine, dem Lösungsgang S. 154 (II_4) analoge, Differentialgleichung für den Bodendruck ableiten, die jetzt folgende Form hat:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha \sigma C \sin (2\lambda - \sigma t) - \beta \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{2\gamma C}{\sin 2\varphi} \sin (2\lambda - \sigma t) \frac{\partial p}{\partial \varphi}. \qquad (\text{VII}_2)$$

Diese Gleichung ist identisch mit folgendem System simultaner totaler Differentialgleichungen

$$\frac{dp}{-\alpha \sigma C \sin (2\lambda - \sigma t)} = \frac{dt}{-1} = \frac{d\lambda}{-\beta} = \frac{d\varphi}{\frac{2\gamma C}{\sin 2\varphi} \sin (2\lambda - \sigma t}} \qquad (\text{VII}_3)$$

worin α, β, γ dieselbe Bedeutung haben wie in Gl. II_4.

Als Lösung dieser Differentialgleichung ist analog den Gleichungen II_5 zu finden:

$$p + \frac{\alpha \sigma C}{2\beta - \sigma} \cdot \cos (2\lambda - \sigma t) = \xi, \qquad (\text{VII}_4)$$

$$\lambda - \beta t = \eta,$$

$$\frac{2\gamma C}{2\beta - \sigma} \cdot \cos (2\lambda - \sigma t) + \frac{1}{2} \cos 2\varphi = \zeta.$$

Wir wählen nun zur Zeit $t = 0$ gemäß den Ausführungen S. 176, Ziffer 2, als Anfangsdruckverteilung am Boden:

$$p_0 = A - M \sin (2\varphi - \psi) + N \sin 2\varphi \cos (8\lambda + \chi) + P \cos (2\lambda + \varepsilon), \qquad (\text{VII}_5)$$

d. h. es setzt sich der Druck am Boden zur Zeit $t = 0$ zusammen aus dem mittleren Bodendruck A, einer Rinne tiefen Druckes bestimmt durch das Glied $-M \sin (2\varphi - \psi)$, einer Welle der Form $N \sin 2\varphi \cos (8\lambda - \chi)$, d. h. 8 Maxima und 8 Minima auf einem Breitenkreis und schließlich einer Welle der Form $P \cos (2\lambda + \varepsilon)$, die dieselbe Form wie die Welle in der Höhe H besitzt mit je zwei Maxima und Minima auf einem Erdumfang.

Zunächst lassen wir uns die Größe der Amplituden N und P völlig frei und wählen folgenden allgemeinen Lösungsansatz:

$$\xi + c_1 \cdot F_1(\eta) + c_2\,\zeta + c_3 \cdot \sqrt{1 - [2\,c_4\,\zeta + c_5\,F_2(\eta)]^2} \cdot F_3(\eta) = c_6. \quad (\mathrm{VII}_6)$$

F_1, F_2, F_3 sind beliebige freie Funktionen von η und c_1 bis c_6 freie Konstante.

Setzen wir nun die Größen ξ, ζ, η (VII_4) in die Gl. VII_6 ein und wählen dabei $F_1(\eta) = \cos(2\,\lambda - 2\,\beta\,t + \varrho)$ und $F_2(\eta) = \cos(2\,\lambda - 2\,\beta\,t)$ und lassen $F_3(\eta)$ noch frei, so erhalten wir eine Gleichung für p. Die freien Konstanten c_1 bis c_6, ϱ und $F_3(\lambda)$ lassen sich aus der Bedingung, daß für $t = 0$, $p = p_0$ (Gl. VII_5) sein muß, bestimmen, da alle Glieder in ihr identisch gleich Null sein müssen.

Es ergeben sich damit nacheinander:

$$c_6 = A, \qquad c_2 = -2\,M \sin\psi, \qquad (\mathrm{VII}_7)$$

$$c_1^2 = \left[\frac{4\,\gamma\,M \sin\psi - \alpha\,\sigma}{2\,\beta - \sigma} \cdot C - P\cos\varepsilon\right]^2 + P^2 \sin^2\varepsilon,$$

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{-P\sin\varepsilon}{\frac{4\,\gamma\,M\sin\psi - \alpha\,\sigma}{2\,\beta - \sigma} \cdot C - P\cos\varepsilon},$$

$$F_3(\lambda) = M\cos\psi - N\cos 8\,\lambda,$$

$$c_3 = 1, \qquad c_4 = 1, \qquad c_5 = \frac{4\,\gamma\,C}{2\,\beta - \sigma}.$$

Die bisherige Rechnung erfolgte unter der Voraussetzung, daß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen des Lösungsansatzes VII_6 positiv ist. Wird dieser Ausdruck aber negativ, dann ist für diese speziellen Werte von p ein anderer Lösungsansatz zu wählen in der Form:

$$\xi + c_1 \cdot F_1(\eta) + c_2 \cdot \zeta + c'_3 \cdot \sqrt{[2\,c_4\,\zeta - c_5\,F_2(\eta)]^2} \cdot F_3(\eta) = c_6. \quad (\mathrm{VII}_8)$$

In diesem neuen Ansatz ist $c'_3 \neq c_3$ und mit Gl. VII_8 lassen sich alle Konstanten in gleicher Weise wie oben bestimmen, nur ergibt sich für c'_3 in Abweichung von $c_3 = 1$ der Wert $c'_3 = -i$ ($i = \sqrt{-1}$).

Nach Festlegung aller Konstanten ergibt sich folgende Lösung für den Bodendruck:

$$p = A + M\sin\psi\cos 2\,\varphi - \frac{\alpha\,\sigma - 4\,\gamma\,M\sin\psi}{2\,\beta - \sigma} \cdot C\cos(2\,\lambda - \sigma\,t) -$$

$$- c_1\cos(2\,\lambda - 2\,\beta\,t + \varrho) -$$

$$- \sqrt{1 - \left[\frac{4\,\gamma}{2\,\beta - \sigma} \cdot C\{\cos(2\,\lambda - \sigma\,t) - \cos(2\,\lambda - 2\,\beta\,t)\} + \cos 2\,\varphi\right]^2} \cdot$$

$$\cdot [M\cos\psi - N(8\,\lambda - 8\,\beta\,t)]. \qquad (\mathrm{VII}_9)$$

c_1 und ϱ sind durch die Werte in Gl. VII_7 festgelegt.

Man erkennt, daß diese Lösungsgleichung sich zusammensetzt

1. aus einer nur von der geographischen Breite φ abhängigen mittleren meridionalen Druckverteilung;

2. aus einer nach Osten mit der Winkelgeschwindigkeit der oberen Druckwelle fortschreitenden Welle, deren Amplitude außer von der Amplitude der oberen Welle C noch von der vorgegebenen meridionalen Rinne tiefen Druckes ($M \sin \psi$) am Boden, von σ und $n\beta$ den Winkelgeschwindigkeiten der oberen bzw. der unteren freien Welle abhängig ist;

3. aus einer weiteren nach Osten mit der Winkelgeschwindigkeit 2β fortschreitenden und um den Winkel ϱ phasenverschobenen Welle, deren Amplitude von der Amplitude der oberen Welle C, von der Rinne tiefen Druckes am Boden, von σ und 2β und schließlich von der Amplitude P der am Boden zur Zeit $t = 0$ vorgegebenen Welle der Form $P \cos(2\lambda - \varepsilon)$ abhängig ist;

4. aus dem komplizierteren Wurzelglied, in dem die Differenz der erzwungenen und der freien Welle enthalten ist, welches mit der am Boden vorgegebenen kurzperiodischen Welle von der Winkelgeschwindigkeit 8β multipliziert wird. Interessant ist, daß diese 8β-Welle einzig und allein hier in die Lösung eingeht.

Natürlich lassen sich aus diesem komplizierten Ausdruck zunächst keine weiteren Schlüsse über das Aussehen der Druckverteilungen und ihrer Änderungen am Boden in den aufeinander folgenden Tagen ziehen.

Um solche zu gewinnen ist es erforderlich, für die einzelnen Tage diesen Ausdruck rechnerisch auszuwerten. Dies wird im folgenden Abschnitt ausgeführt.

VIII. Zahlenmäßige Annahmen und rechnerische Auswertung des Falles 5.

Entsprechend der Tabelle 1 (S. 161) des Falles 3 wurden für die Berechnung des Falles 5 nachfolgende konstante Werte verwendet. Sie zeigen nur geringe Abweichungen von denen in Tabelle 1. Es wurde hier nur ein mittlerer Bodendruck von 760,8 mm Hg verwendet, entsprechend den Werten von Hann-Süring, Lehrbuch der Meteorologie, 5. Aufl. (siehe S. 159), da bei diesem Beispiel durch die Superposition vieler Wellen zu hohe Druckwerte erwartet wurden. Nach den gleichen Gesichtspunkten wurde M von 16 auf 5 und A von 775 mm auf 765 mm Hg verringert.

Die obere primäre Welle habe nur zwei vollständige Wellen auf einem Breitenkreis, ebenso eine der beiden Wellen am Boden, während die andere acht vollständige Wellen auf dem Erdumfang haben soll. Demnach hat n bei der ersten Welle den Wert 2, bei der anderen den Wert 8. Wir nehmen für die obere und die beiden unteren Wellen eine gleiche Amplitude von 4 mm an (C, P, N).

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der drei Wellen sollte aber gemäß den Ausführungen (S. 176, Ziffer 1 und 2) verschieden sein; es wurde daher für die obere primäre Welle eine Periode von 40 Tagen und damit eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sigma = \frac{2\pi}{40 \text{ Tage}} = 9°$ pro Tag gewählt. Damit ist eine sehr langsame Fortbewegung nach Osten vorgegeben, was für ein kleineres Gebiet nahezu einem stationären Zustand in der Höhe gleichkommt. Für die beiden unteren Wellen wurden in Abweichung

Tabelle 4.

Bezeichnung	Numerischer Wert	Erklärung
p	760,8 mm Hg	Mittlerer Bodendruck
p_H	304 mm Hg	Mittlerer Höhendruck
T, t	261° abs. — 12° C	Mitteltemperatur (0 bis 7 km)
p/p_H	2,503	
A	765 mm Hg	Grundwert des Bodendruckes
M	5	Amplitude des Gliedes der meridionalen Druckrinne
ψ	10°	Phasenwinkel, der die Lage der Rinne in 50° Breite festlegt
$\sin\psi$	0,17365	
$\cos\psi$	0,98481	
$M\sin\psi$	0,86825	
$M\cos\psi$	4,92405	

davon die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $2\beta = 30°$ pro Tag und $8\beta = 120°$ pro Tag gewählt. Dies entspricht einem Werte von $\beta = 15°$ pro Tag und mit $\beta = \frac{2\pi}{T_f}$, einer Periode T_f der freien Wellen von 24 Tagen; die beiden unteren Wellen haben demnach Perioden von 12 bzw. 3 Tagen. Mit diesen Festsetzungen läßt sich eine der Tabelle 2 des Falles 3 analoge Tabelle für die fehlenden Konstanten der Lösungsgleichung VII_9 aufstellen.

In Tabelle 4 und 5 sind nun alle Konstanten der Lösungsgleichung VII_9 festgelegt und ihrer rechnerischen Auswertung steht nichts mehr im Wege. Diese Gleichung hat die Form

$$p = 765 + 0{,}86825\cos 2\varphi - 3{,}188\cos(2\lambda - \sigma t) -$$
$$- 6{,}647\cos(2\lambda - 2\beta t + 155) -$$
$$- \sqrt{1 - [0{,}24934\{\cos(2\lambda - \sigma t) - \cos(2\lambda - 2\beta t)\} + \cos 2\varphi]^2} \cdot$$
$$\cdot [4{,}92 - 4\cos(8\lambda - 8\beta t)]. \qquad (VIII_1)$$

Diese Gleichung wurde rechnerisch für die Breiten 80°, 70°, 60° . . . bis 30° und die Längen 0°, 10°, 20°, ... bis 180° ausgewertet. Bei 180° Länge wiederholt sich bis zu 360° Länge die gesamte Druckverteilung. Jede Karte enthält demnach den Bereich 30° bis 80° Breite und 0° bis 180° Länge, für den je Karte 114 Druckwerte gerechnet wurden.

Tabelle 5.

Bezeichnung	Numerischer Wert	Erklärung
$n,\ n'$	2, 8	Anzahl vollständiger Wellen auf einem Breitenkreis
$C,\ P,\ N$	4 mm	Amplitude der drei Wellen
$\sigma = \frac{2\pi}{T_z}$, $T_z = 40$ Tage	0,1818 × 10^{-5} [sec^{-1}] 9 Grad pro Tag	Frequenz der oberen primären Druckwelle
$\beta = \frac{2\pi}{T_f}$, $T_f = 24$ Tage	0,3030 × 10^{-5} [sec^{-1}] 15 Grad pro Tag	
2β	0,6060 × 10^{-5} [sec^{-1}] 30 Grad pro Tag	Frequenz der ersten unteren Welle
8β	2,424 × 10^{-5} [sec^{-1}] 120 Grad pro Tag	Frequenz der zweiten unteren Welle
$2\beta - \sigma$	0,4242 × 10^{-5} [sec^{-1}]	
ε (oben)	— 45°	Phasenwinkel der oberen Welle
ϱ (unten) χ (unten)	+ 155° 0°	Phasenwinkel der beiden unteren Wellen
α	1,985	
γ	6.600 × 10^{-8}	
$\frac{4\gamma M \sin\psi - \alpha\sigma}{2\beta - \sigma}$	— 0,797	
$\frac{(4\gamma M \sin\psi - \alpha\sigma)}{2\beta - \sigma} \cdot C$	— 3.188	Amplitude des 2. Gliedes der Gleichung
$V = \frac{4\gamma C}{2\beta - \sigma}$	0,249	Amplitude des Gliedes unter dem Wurzelzeichen der Gleichung VII_9
C_1	6,649	Konstante VII_9
$P\cos\varepsilon$ $P\sin\varepsilon$	+ — 2,828	

In dieser Weise wurden 20 Karten der Bodendruckverteilung für die Tage 0 bis 19 ermittelt und gezeichnet.

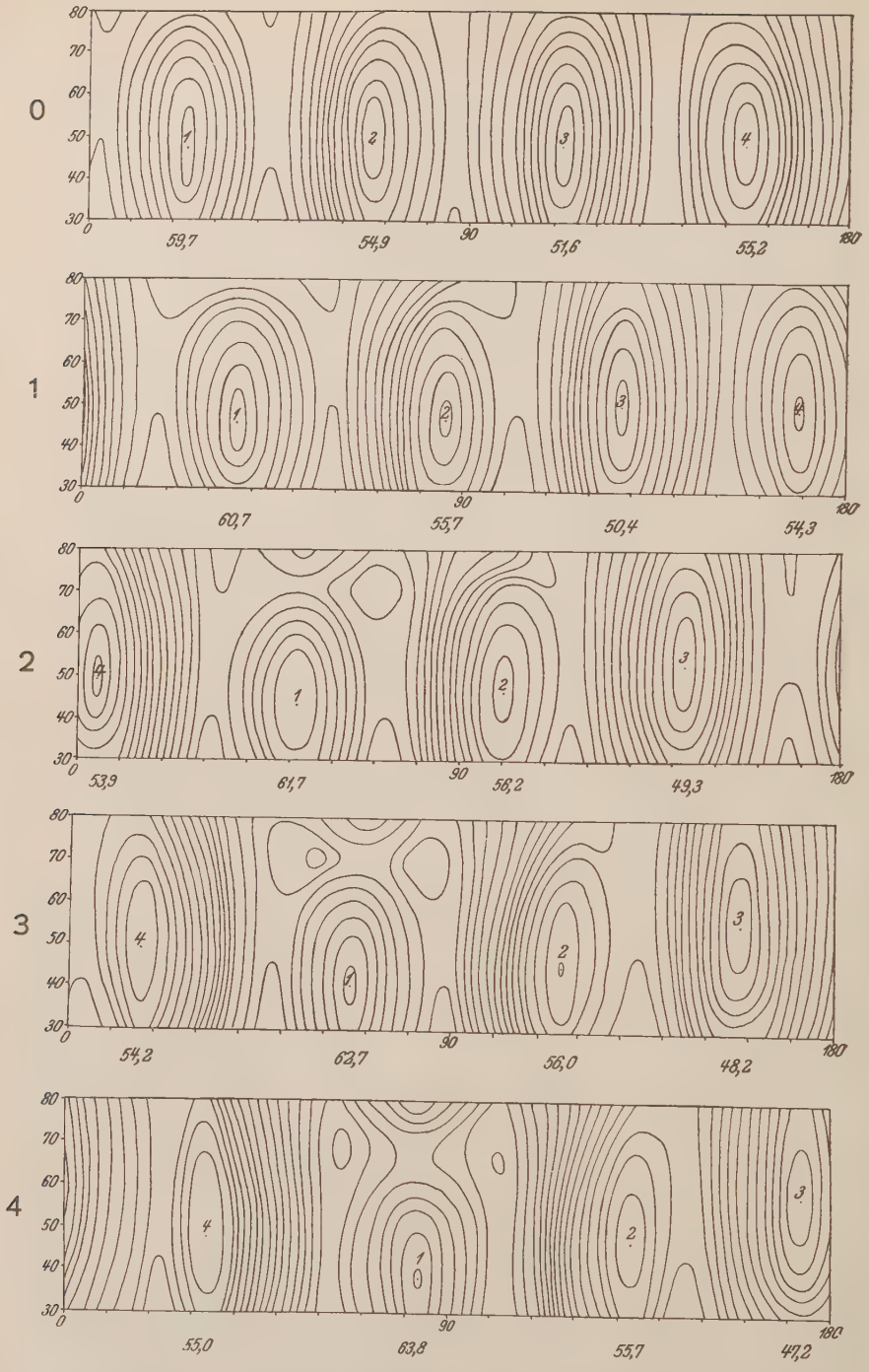
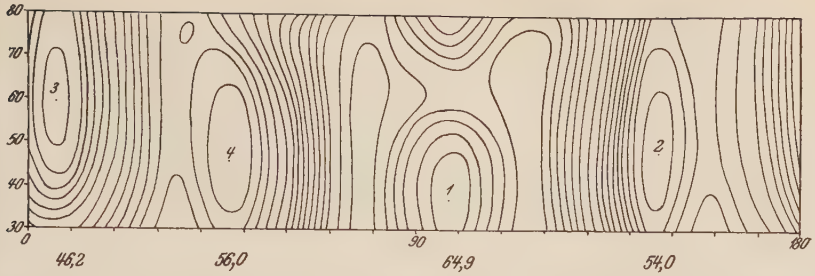
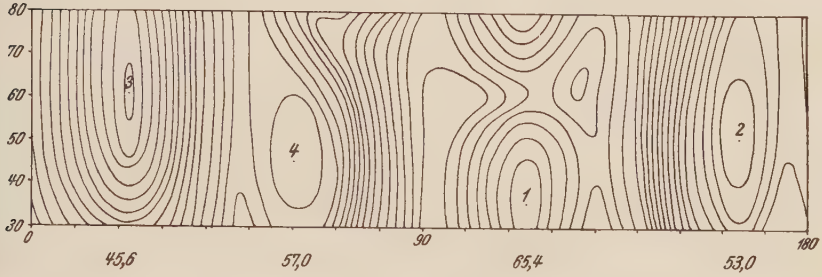


Abb. 8. Bodendruckverteilung des Falles 5 für den Anfangstag und die weiteren Tage 0 bis 19. (Isobarenabstand von 1 zu 1 mm Hg; der Wert der innersten Isobare jeder der 4 Bodentiefdruckgebiete jeder Karte ist am unteren Kartenrand angegeben; nach $\lambda = 180^0$ wiederholt sich jede Karte in derselben Weise.)

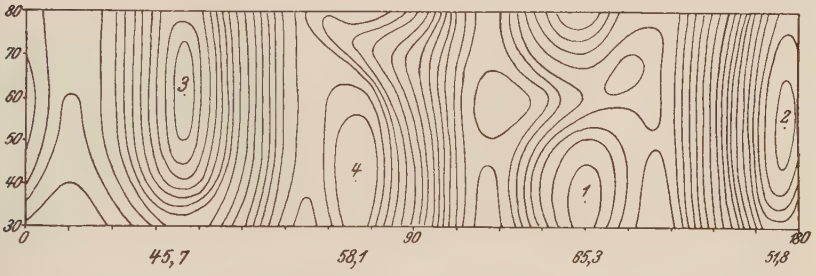
5



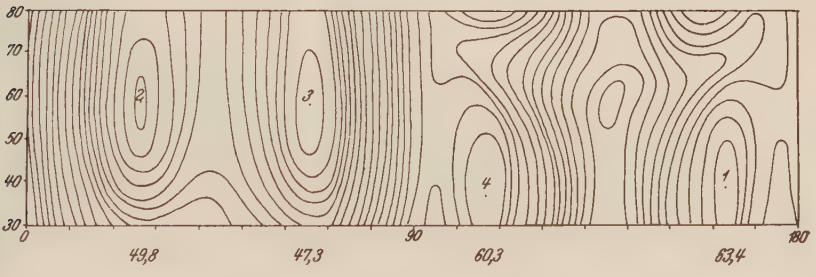
6



7



8



9

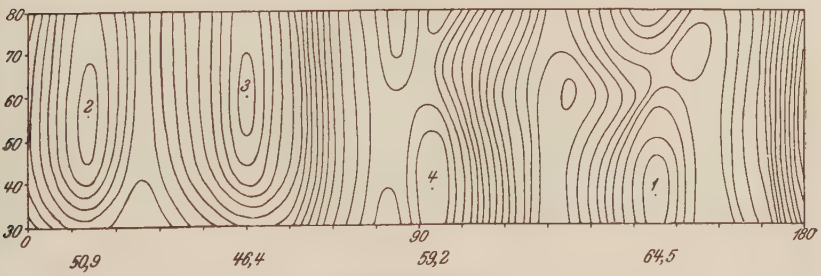


Abb. 8. (Fortsetzung.)

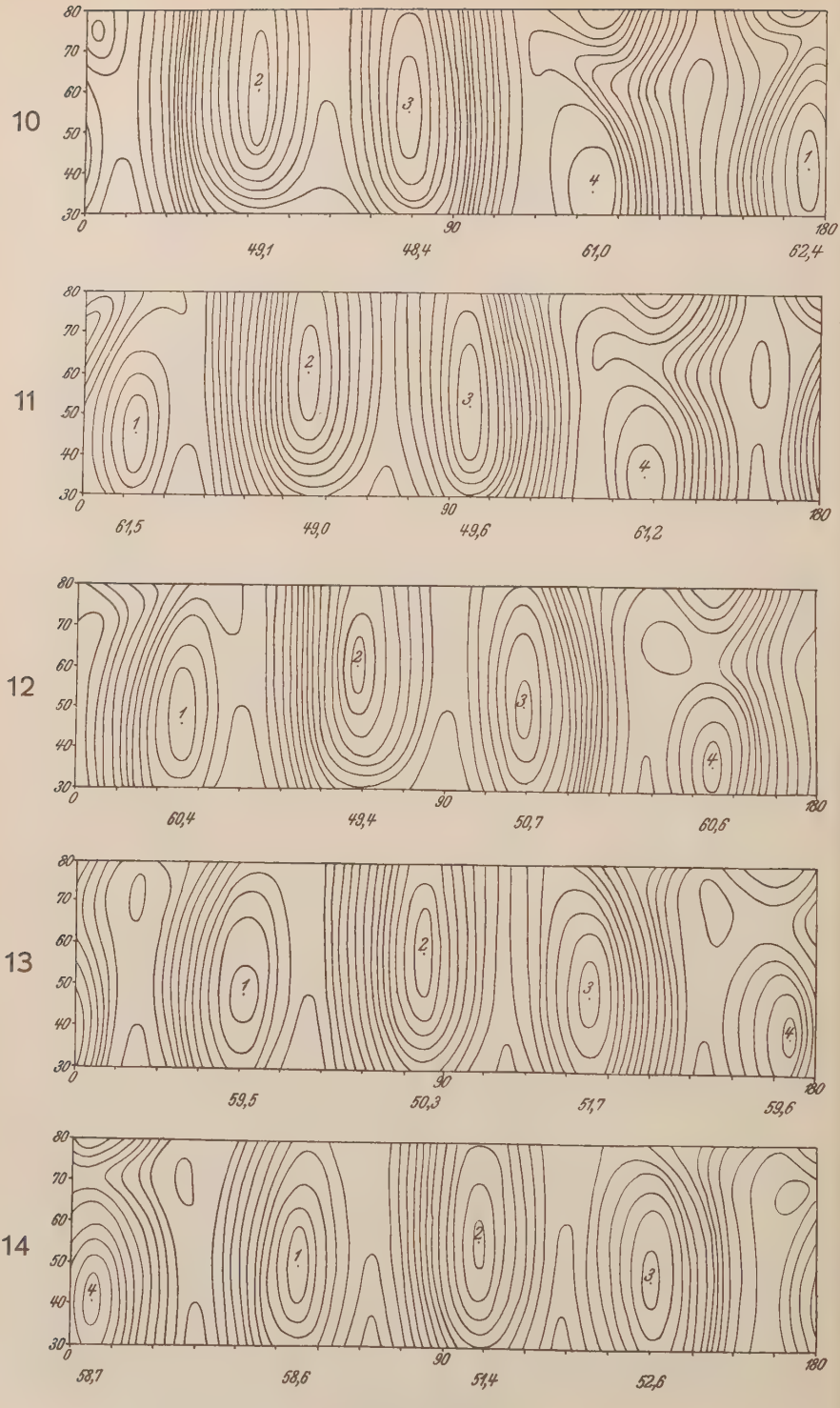


Abb. 8. (Fortsetzung.)

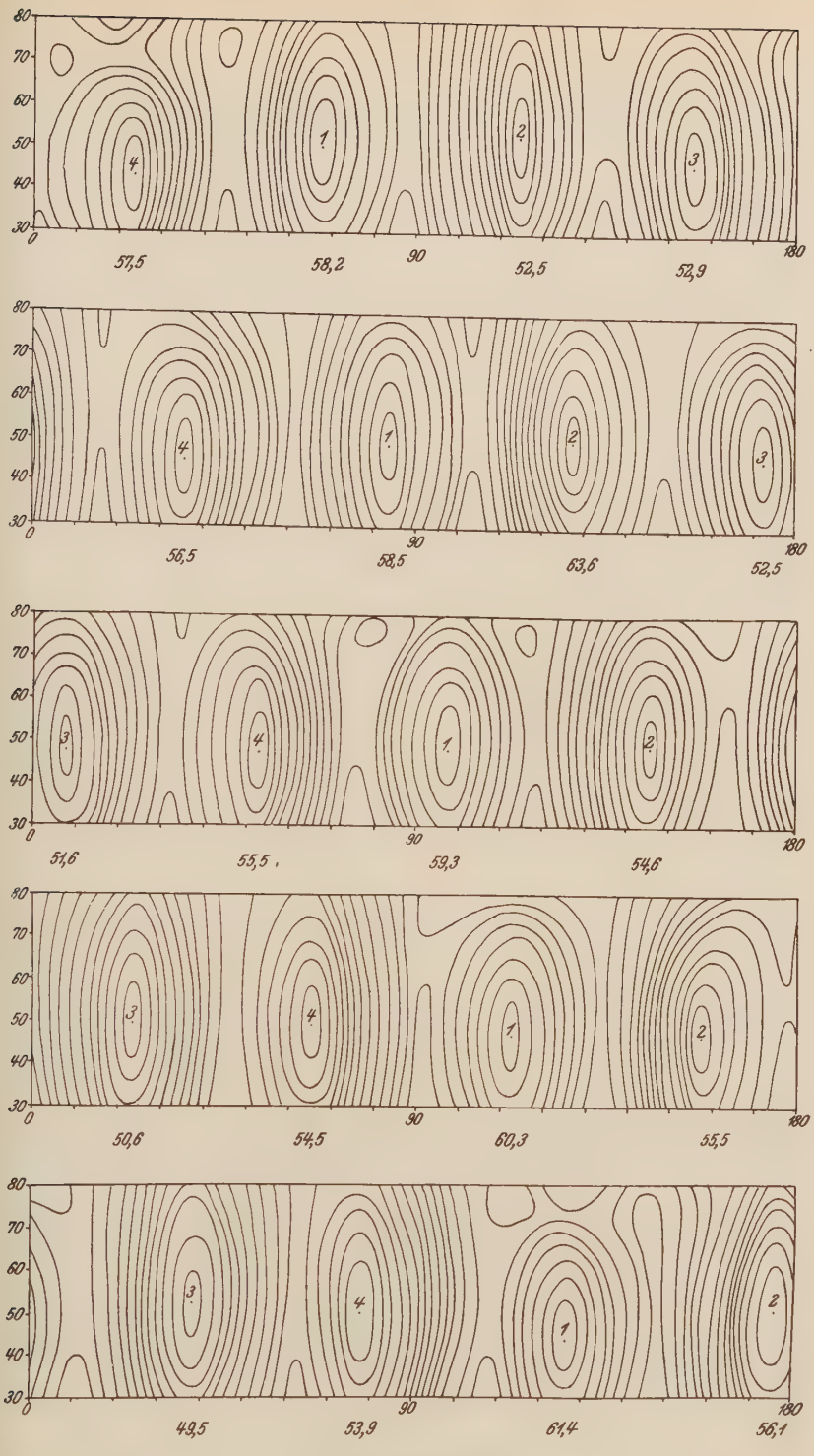


Abb. 8. (Fortsetzung.)

Ein erster roher Überblick über die 20 Tage zeigt, daß jede Karte auf der Kartenlänge von 180° (halber Erdumfang) 4 gut ausgebildete Tiefdruckgebiete (in den Bodenkarten mit Ziffer 1 bis 4 bezeichnet), die durch 4 Hochdruckrücken getrennt sind, aufzeigt. Weiterhin erkennt man, daß diese 4 Störungen jeder Karte untereinander einerseits ungleiche Kerndrucke, anderseits ungleiche Lage der Kerne besitzen. Man erkennt, daß dies auf einigen Karten in nur geringem Maße, auf anderen in sehr ausgeprägter und auffälliger Form der Fall ist. Schon die rohe Durchsicht läßt erkennen, daß hier eine Gesamtbewegung der Störungsgebiete als Ganzes vorhanden ist.

Aber weiterhin fällt schon bei der Betrachtung der Karte des zweiten Tages auf, daß die Störung 1 am oberen Rande eine eigenartige Spaltung ihres Bereiches zeigt und der tiefe Druck durch eine Brücke höheren Druckes getrennt ist, welcher die der Störung 1 benachbarten Gebiete hohen Druckes miteinander verbindet. Auf der Karte des 1. Tages war davon noch nichts zu erkennen, jedoch ist die Andeutung zu einer solchen Entwicklung bereits zu sehen. Man stellt weiter fest, daß auch andere Störungen an anderen Tagen eine solche Spaltung erleiden (z. B. Störung 4 vom 6. auf den 7. Tag).

Eine Übersicht über die Hochdruckgebiete zeigt in Abweichung von Fall 3, daß wohl die Kerne hohen Druckes meist im Norden bzw. Süden der Karte liegen und diese wieder durch weniger hohe Rücken in Nord-Südrichtung miteinander verbunden sind, aber daß auch abgeschlossene Kerne hohen Druckes sich in das Kartenbild hinein verlagern (siehe Karte des 2. Tages), was wiederum mit dem vorstehend erwähnten Prozeß der Teilung der Störung in Verbindung zu stehen scheint. Damit zeigen auch die Kerne hohen Druckes eine Verlagerung und bleiben nicht bei der West-Ostbewegung des Gesamtsystems immer in 80° bzw. 30° Breite, wie im Fall 3.

Verfolgen wir den Vorgang der Spaltung der Störung 1, die zwischen dem 1. und 2. Tag erfolgt, weiter, so erkennt man, daß sich dieser Prozeß bis zirka zum 6. Tage hin verstärkt, d. h. es rückt die Hauptstörung verstärkt nach Süden und ein zweiter Kern tiefen Druckes von Norden her verstärkt ins Kartenbild, der durch die bereits erwähnte Hochdruckbrücke, welche West-Ost verläuft, stets von der Hauptstörung getrennt ist. Vom 6. bis zum 10. Tag nimmt dieser Prozeß wieder ab und am 11. Tag ist die Störung 1 wieder in ungeteiltem Zustande wie in der Karte des 1. Tages vorhanden.

Der Vorgang der Störungsteilung hat also nicht nur einen Beginn, sondern auch ein Maximum der Entwicklung und ein Ende. Man erkennt ohne weiteres, daß die einzelnen Störungen sich dabei als Ganzes um große Beträge nord- bzw. südwärts verlagern und nicht nur wie im Falle 3 das Zentrum der Störungen sich allein bewegt.

Drei Hauptmerkmale der Bewegung innerhalb des Bodendruckfeldes während dieser 20 berechneten Tage sind demnach festzustellen, die einer näheren Untersuchung bedürfen:

1. Bahn der Tiefdruckgebiete, verbunden mit der Frage der Steuerung.
2. Intensitätsänderungen der Bodendruckstörungen.
3. Spaltung der Bodendruckstörungen.

Um eine solche Untersuchung nach allen Gesichtspunkten hin erschöpfend durchführen zu können, schien es angezeigt, aus den 20 Bodendruckverteilungen 24stündige Druckänderungen zu berechnen und so 19 24stündige Tendenzkarten zu zeichnen. Davon seien zwei Karten (2. auf 3. Tag und 3. auf 4. Tag) als Beispiel in Abbildung 9 wiedergegeben.

Abb. 9. 24stündige Druckänderungskarten vom 2. auf den 3. und vom 3. auf den 4. Tag des Falles 5. (Isallobarenabstand von 1 zu 1 mm Hg; die Isallobare 0 mm Hg ist dick ausgezogen; Fallgebiete sind mit einem — Zeichen, Steiggebiete mit einem + Zeichen im Zentrum gekennzeichnet.)

Die Betrachtung dieser 24stündigen Druckänderungskarten zeigt entsprechend den vier Tief- bzw. Hochdruckgebieten jeder Bodenkarte vier Steig- und vier Fallgebiete des Druckes auf 180° Länge, d. i. ein halber Erdumfang.

Genau wie in den Bodenkarten zeigt sich auch in den Druckänderungskarten die gesteuerte Bewegung der Änderungsgebiete, sowie deren ausgesprochene Intensitätsschwankung. Auch die Erscheinung der Spaltung ist in klarer Form bei den Steig- sowie bei den Fallgebieten des Druckes erkennbar. Die Kerngebiete der Steig- und Fallgebiete weisen bei ihrer allgemeinen West-Ostbewegung dieselben Schwankungen ihrer Bewegungsrichtung nach Norden bzw. Süden auf, so wie auch das Gesamtgebiet der Druckänderung gleichfalls Bewegungen mit Nord- bzw. Südkomponente ausführt.

Die Spaltung z. B. des der Bodenstörung 1 entsprechenden präzyklonalen Fallgebietes erfolgt zirka am 1. Tag, denn wie man den Karten

leicht entnehmen kann, ist das Fallgebiet 1 in der Karte 0 bis 1 noch nicht, in der Karte 1 bis 2 aber schon gespalten.

Man kann demnach feststellen, daß die Bodendruckkarten den Druckänderungskarten voll entsprechen und die drei, auf S. 187 erwähnten, Hauptmerkmale in derselben Weise aufzeigen. Zur weiteren Untersuchung dieser drei Hauptfragen halten wir uns im Folgenden mehr an die Bodendruckkarten selbst, um eine einheitliche Linie einzuhalten, jedoch gilt es festzustellen, daß zur Untersuchung dieser Fragen sowohl die Boden- als auch die Tendenzkarten in gleicher Weise herangezogen werden können.

IX. Untersuchung der Bewegungsbahn des Zentrums der Bodenstörungen des Falles 5 und die Behandlung der Frage der Steuerung.

Eine der wichtigsten Fragen, die zu lösen ist, ist die Frage der Bewegung der Bodenstörungen und damit verbunden die Frage der Steuerung der Zyklonen am Boden. Wir gehen dabei vom Gedanken aus, daß in der Höhe (7 km) eine mehr oder weniger stationäre Druckverteilung vorhanden ist, die nach allen bisherigen Erfahrungen der synoptischen Meteorologie besonders die Bewegung der troposphärischen Störungen beeinflussen kann, also eine Steuerung im Sinne v. Fickers auf die Richtung der Bewegung der Bodenstörungen ausübt. Deshalb ist es notwendig, die Bewegung des Zentrums der Tiefdruckgebiete am Boden zu untersuchen.

a) Bestimmung der Bewegungsbahn der Bodenstörungen aus den Bodendruckkarten.

Aus den Bodendruckkarten entnehmen wir für alle 20 Tage die geographische Länge bzw. Breite λ_m und φ_m des Zentrums der einzelnen Bodentiefs 1 bis 4. In nachstehender Tabelle 6 sind für jede der Depressionen 1 bis 4 die λ_m- bzw. φ_m-Werte des Zentrums, die Werte $\cos 2\varphi_m$ und der Luftdruckwert p_m des Zentrums angegeben. Ein Pfeil gibt in der Tabelle an, ob die Depression an dem betreffenden Tag eine Nord- bzw. Südkomponente der Bewegung aufzeigt, bzw. gibt ein waagrechter Strich an, daß nur sehr geringe Nord- bzw. Südkomponente oder überhaupt keine solche vorhanden ist.

Man erkennt sofort aus den Werten der Tabelle 6, daß die Störungen sich nicht breitenparallel bewegen, sondern daß zu der vorhandenen Translationsbewegung des Systems in west-östlicher Richtung noch zusätzliche Bewegungen mit Nord- bzw. Südkomponente treten, die bewirken, daß die Bodentiefdruckgebiete starke Verlagerungen nach Norden bzw. Süden, während ihrer allgemeinen West-Ostbewegung zeigen.

Weiterhin aber zeigt es sich, daß die λ_m-Werte in Abhängigkeit von der Zeit t gerade Linien sind und es läßt sich leicht feststellen, daß die Beziehung zwischen den λ_m-Werten der Zentren der Störungen und der Zeit von der Form

$$\lambda_m = \lambda_0 + \beta t, \qquad (IX_1)$$

$\beta = 15°$ pro Tag sind, wobei der Wert λ_0 zur Zeit $t = 0$ für jede Störung verschieden und vorläufig lediglich aus der Zeichnung mit mehr oder weniger großer Genauigkeit bestimmt werden kann.

Die Beziehung zwischen φ_m bzw. $\cos 2\varphi_m$ der Zentren und der Zeit ergibt sich scheinbar nach Tabelle 6 als reine cos-Funktion, deren zahlenmäßige Gleichung erst zu ermitteln ist.

b) Theoretische Bestimmung der Bewegungsbahn der Bodenstörungen.

Die mathematische Bedingung dafür, daß der Druck p ein Minimum wird, ist analog S. 169

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0. \tag{IX$_2$}$$

Bei Ausführung der partiellen Differentiationen der Gl. VII$_9$ ergeben sich folgende recht komplizierte Ausdrücke:

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = -2M \sin\psi \sin 2\varphi - \frac{4 \sin 2\varphi \cdot [\ldots\ldots]}{2\sqrt{1-[\ldots\ldots]^2}} \cdot$$
$$\cdot [M \cos\psi - N \cos(8\lambda - 8\beta t)] = 0. \tag{IX$_3$}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 2U \sin(2\lambda - \sigma t) + 2c_1 \sin(2\lambda - 2\beta t + \varrho) + \tag{IX$_4$}$$
$$+ \frac{[\ldots\ldots]}{\sqrt{1-[\ldots\ldots]^2}} \{-2V \sin(2\lambda - \sigma t) + 2V \sin(2\lambda - 2\beta t)\} \cdot$$
$$\cdot [M \cos\psi - N \cos(8\lambda - 8\beta t)] - \sqrt{1-[\ldots\ldots]^2} \cdot \{8N \sin(8\lambda - 8\beta t)\}$$

wobei (IX$_5$)

$$[\ldots\ldots] = \left[\frac{4\gamma}{2\beta - \sigma} \cdot C\{\cos(2\lambda - \sigma t) - \cos(2\lambda - 2\beta t)\} + \cos 2\varphi\right].$$

$$U = \frac{\alpha\sigma - 4\gamma M \sin\psi}{2\beta - \sigma} \tag{IX$_6$}$$

und

$$V = \frac{4\gamma}{2\beta - \sigma} \cdot C \tag{IX$_7$}$$

bedeuten.

Aus Gl. IX$_3$ ergibt sich

$$\frac{-M \sin\psi}{M \cos\psi - N(8\lambda - 8\beta t)} = \frac{[\ldots\ldots]}{\sqrt{1-[\ldots\ldots]^2}}. \tag{IX$_8$}$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $\varphi_m = \varphi_0$ und $\lambda_m = \lambda_0$.

Damit wird für $t = 0$

$$\frac{-M \sin\psi}{M \cos\psi - N \cos 8\lambda_0} = \frac{\cos 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0} = \operatorname{cotg} 2\varphi_0. \tag{IX$_9$}$$

Um eine Bestimmung von λ_0 zu ermöglichen, setzen wir in Gl. IX$_4$ die Zeit t gleich Null und erhalten

$$2U \sin 2\lambda_0 + 2c_1 \sin(2\lambda_0 + \varrho) - \sin 2\varphi_0 \cdot 8N \sin 8\lambda_0 = 0. \tag{IX$_{10}$}$$

Tabelle 6.

Tag	Tief 1				Tief 2			
	λ_m°	φ_m°	cos 2 φ_m°	p_m (mm Hg)	λ_m°	φ_m°	cos 2 φ_m	p_m (mm Hg)
0	22,5	47,8	— 0,097	759,7 ↓	65,7	47,8	— 0,099	754,9 ↓
1	37,5	45,7	— 023	60,7 ⇓	80,7	46,2	— 042	55,7 —
2	52,5	42,7	+ 079	61,7 ⇓	95,7	45,4	— 016	56,2 —
3	67,5	40,5	+ 156	62,7 ↓	110,7	45,6	— 022	56,0 —
4	82,5	38,1	+ 236	63,8 ↓	125,7	46,7	— 060	55,7 ↑
5	97,5	36,4	+ 295	64,9 ↓	140,7	48,4	— 125	54,0 ↑
6	112,5	35,5	+ 325	65,4 —	155,7	51,0	— 209	53,0 ⇑
7	127,5	35,5	+ 323	65,3 —	170,7	53,7	— 299	51,8 ⇑
8	142,5	36,5	+ 288	64,5 ↑	185,7	56,3	— 385	50,9 ↑
9	157,5	38,5	+ 225	63,4 ↑	200,7	58,5	— 454	49,8 ↑
10	172,5	40,9	+ 143	62,4 ⇑	215,7	60,0	— 499	49,1 —
11	187,5	43,5	+ 053	61,5 ⇑	230,7	60,4	— 512	49,0* —
12	202,5	46,0	— 034	60,4 ↑	245,7	59,7	— 491	49,4 —
13	217,5	48,0	— 106	59,5 ↑	260,7	58,1	— 441	50,3 ↓
14	232,5	49,4	— 153	58,6 —	275,7	55,8	— 367	51,4 ↓
15	247,5	49,9	— 170	58,2* —	290,7	53,1	— 279	52,5 ⇓
16	262,5	49,4	— 153	58,5 —	305,7	50,4	— 189	53,6 ⇓
17	277,5	48,0	— 106	59,3 ↓	320,7	48,1	— 108	54,6 ↓
18	292,5	46,0	— 034	60,3 ⇓	335,7	46,4	— 049	55,5 —
19	307,5	43,5	+ 053	61,4 ⇓	350,7	50,5	— 017	56,1 —

Fortsetzung der Tabelle.

	Tief 3				Tief 4			
Tag	λ_m°	φ_m°	$\cos 2\varphi_m$	p_m (mm Hg)	λ_m°	φ_m°	$\cos 2\varphi_m$	p_m (mm Hg)
0	112,5	47,8	— 0,097	751,6 ↑	159,3	47,8	— 0,097	755,2 ↑
1	127,5	49,9	— 172	50,4 ↑	174,3	49,1	— 144	54,3 —
2	142,5	52,6	— 260	49,3 ⇑	189,3	49,6	— 160	53,9* —
3	157,5	55,3	— 352	48,2 ↑	204,3	49,1	— 142	54,2 —
4	172,5	57,8	— 431	47,2 ↑	219,3	47,7	— 094	55,0 ↓
5	187,5	59,6	— 489	46,2 —	234,3	45,6	— 021	56,0 ↓
6	202,5	60,6	— 519	45,6* —	249,3	43,1	+ 066	57,0 ⇓
7	217,5	60,6	— 517	45,7 —	264,3	40,5	+ 156	58,1 ⇓
8	232,5	59,4	— 482	46,4 ↓	279,3	38,1	+ 238	59,2 ↓
9	247,5	57,4	— 419	47,3 ↓	294,3	36,3	+ 299	60,3 ↓
10	262,5	54,8	— 337	48,4 ⇓	309,3	35,3	+ 333	61,0 —
11	277,5	52,1	— 245	49,6 ⇓	324,3	35,3	+ 334	61,2 —
12	292,5	49,6	— 159	50,7 ↓	339,3	36,2	+ 303	60,6 —
13	307,5	47,5	— 087	51,7 ↓	354,3	37,9	+ 244	59,6 ↑
14	322,5	46,2	— 040	52,6 —	369,3	40,3	+ 163	58,7 ↑
15	337,5	46,0	— 034	52,9 —	384,3	42,9	+ 073	57,5 ⇑
16	352,5	46,2	— 041	52,5 —	399,3	45,4	— 015	56,6 ↑
17	367,5	47,5	— 088	51,6 ↑	414,3	47,5	— 089	55,5 ↑
18	382,5	49,6	— 160	50,6 ↑	429,3	49,0	— 139	54,5 —
19	397,5	52,2	— 247	49,5 ⇑	444,3	49,6	— 160	53,9 —

Aus den Gl. IX_6 und IX_7 läßt sich φ_0 eliminieren und man erhält eine Gleichung für λ_0 in der Form

$$U \sin 2\lambda_0 + c_1 \sin(2\lambda_0 + \varrho) + \frac{M\cos\psi - N\cos 8\lambda_0}{M\sin\psi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{M\cos\psi - N\cos 8\lambda_0}{M\sin\psi}\right]^2}} \cdot [4N \sin 8\lambda_0] = 0. \qquad (IX_{11})$$

Die annähernd genauen λ_0-Werte der Zentren der Bodentiefs 1 bis 4 können wir den Bodendruckkarten der Abb. 8 entnehmen und diese müssen die Gl. IX_8 erfüllen. Durch schrittweise Annäherung findet man schließlich folgende Zahlenwerte:

Tabelle 7.

1. Tief	2. Tief	3. Tief	4. Tief
$\lambda° = 22{,}49°$	65,69°	112,51°	159,31°

Da aber $\lambda_m = \lambda_0 + \beta t$ ist ($\beta = 15°$ pro Tag), kann man alle λ_m-Werte für alle Tage genau berechnen. Sie stehen in Tabelle 6.

Um jetzt eine Beziehung zwischen λ_m, φ_m und t der Zentren der Bodentiefdruckgebiete zu gewinnen, benützen wir die Gl. IX_5 und XI_9. Aus ihnen erhält man unmittelbar die Beziehung

$$\cos 2\varphi_m + V[\cos(2\lambda_m - \sigma t) - \cos(2\lambda_m - 2\beta t)] = \cos 2\varphi_0. \qquad (IX_{12})$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung βt mit Hilfe von $\lambda_m = \lambda_0 + \beta t$, so erhält man

$$\cos 2\varphi_m + V\cos(2\lambda_m - \sigma t) = \cos 2\varphi_0 + V\cos 2\lambda_0. \qquad (IX_{13})$$

Diese Gleichung stellt eine Beziehung zwischen φ_m, λ_m und t dar. Weiter erhält man in Verbindung mit der Beziehung $\lambda_m = \lambda_0 + \beta t$ aus Gl. IX_{12} unmittelbar auch die Abhängigkeit der Breite der Tiefdruckkerne von der Zeit t, d. h. die meridionale Verlagerung der Depressionen am Boden mit der Zeit. Es ist

$$2\lambda_m - \sigma t = 2\lambda_0 + (2\beta - \sigma)t = (2\beta - \sigma)\left[t + \frac{2\lambda_0}{2\beta - \sigma}\right]$$

und man erhält damit

$$\cos 2\varphi_m + V\cos(2\beta - \sigma)\left[t + \frac{2\lambda_0}{2\beta - \sigma}\right] = V\cos 2\lambda_0 + \cos 2\varphi_0. \qquad (IX_{14})$$

Eliminiert man aus den Gl. IX_1 und IX_{13} die Zeit t, dann erhält man die *Bahngleichung* der Minima am Boden. Die Gleichung lautet:

$$\cos 2\varphi_m + V\cos\frac{1}{\beta}[(2\beta - \sigma)\lambda_m + \sigma\lambda_0] = \cos 2\varphi_0 + V\cos 2\lambda_0. \qquad (IX_{15})$$

Damit haben wir folgende gesuchte Beziehungen abgeleitet:

1. Abhängigkeit der λ_m-Werte der Zentren der Minima von der Zeit t (Gl. IX_1).
2. Abhängigkeit der φ_m-Werte der Zentren der Minima von der Zeit t (Gl. IX_{14}).
3. Die Bahngleichung der Tiefdruckzentren (Beziehung zwischen φ_m und λ_m) (Gl. IX_{15}).
4. Eine Beziehung zwischen φ_m, λ_m und der Zeit t (Gl. IX_{13}).

Diese vier Gleichungen werden im folgenden diskutiert.

c) Vergleich der Bewegungsbahn der Bodenstörung mit der Höhendruckverteilung.

Der Druck in der Höhe $H = 7$ km war gegeben durch die Beziehung (siehe Gl. VII_1):

$$p_H = p_H^\circ + \nu \cos 2\varphi + C \cos (2\lambda - \sigma t).$$

Die Gleichung einer Isobare der Höhendruckverteilung ergibt sich daraus, wenn man in ihr $p_H = \text{const}$ setzt. Sie ist somit

$$\cos 2\varphi + \frac{C}{\nu} \cos (2\lambda - \sigma t) = \text{const.} \qquad (IX_{16})$$

Um die Beeinflussung der Bewegung der Tiefdruckgebiete am Boden durch die Druckverteilung richtig zu erfassen, was bei der Untersuchung der Steuerung der Bodenstörungen am meisten interessiert, ist es angezeigt, die Bahn der Tiefdruckzentren relativ zur gleichzeitigen Höhendruckverteilung festzustellen. Denn nur so ist es möglich, den Einfluß der oberen Druckverteilung rein zu erkennen. Zu diesem Zwecke müssen wir die Lage λ_m jeder Bodenstörung auf einen Beobachter beziehen, der sich mit dem Maximum der Höhendruckverteilung fortbewegt.

Mathematisch läßt sich dies in folgender Form erfassen: Das Maximum der Druckwelle in der Höhe tritt zur Zeit t bei einem bestimmten $\lambda = \lambda_{max}$ ein, wobei die Beziehung IX_{15} zeigt, daß $\lambda_{max} = \frac{\sigma}{2} t$ sein muß.

Die Differenz Δ der geographischen Längen des Zentrums der Bodenstörung und des Maximums der Druckverteilung in der Höhe ergibt sich zu

$$\Delta = \lambda_m - \lambda_{max} = \lambda_m - \frac{\sigma}{2} t. \qquad (IX_{17})$$

Für einen Beobachter, der mit der oberen Druckwelle mitgeht, ist die obere Druckverteilung stationär und die Isobaren haben die Form

$$\cos 2\varphi + \frac{C}{\nu} \cos 2\lambda = \text{const.} \qquad (IX_{18})$$

Ist eine Steuerung der Tiefdruckgebiete am Boden durch die obere Druckverteilung gegeben, so muß sich die Bodenstörung zu jedem Zeitpunkt in der Richtung der darüber liegenden Isobaren der Höhendruckverteilung bewegen.

Ist dies der Fall, dann muß diese *relative Bahn* der Minima am Boden die Form

$$\cos 2\,\varphi + A \cos 2\,\Delta = \text{const} \qquad (\text{IX}_{19})$$

haben, worin A eine Konstante ist, die die Amplitude dieser relativen Bahn der Bodenstörung angibt.

Mit der obigen Beziehung für Δ wird aus dieser Gl. IX_{18}

$$\cos 2\,\varphi_m = A \cos (2\,\lambda_m - \sigma\,t) = \text{const.} \qquad (\text{IX}_{20})$$

Dies ist aber die Beziehung IX_{13}, wenn man die Konstanten den dortigen Werten gleichsetzt. ($A = V$; $\cos 2\,\varphi_0 + V \cos 2\,\lambda_0 = \text{const.}$)

Dies ist ein strenger Beweis für den steuernden Effekt der oberen Druckverteilung auf die Tiefdruckgebiete in der Troposphäre.

Der Vergleich der Isobarengleichung in der Höhe IX_{16} mit der relativen Bahngleichung IX_{20} zeigt, daß die Amplituden beider Wellen verschieden groß sind. Bei den Höhenisobaren ist sie $\frac{C}{\nu}$, bei der relativen Bahn der Bodendepression hingegen $V = \frac{4\,\gamma}{2\,\beta - \sigma} \cdot C$. In ganz charakteristischer Weise ist diese letztere Amplitude proportional C (Amplitude der Druckschwankung in der Höhe. Außer der Konstante $4\,\gamma$ enthält die Amplitude der relativen Bewegungsbahn der Tiefdruckgebiete nur noch im Nenner den Ausdruck $2\,\beta - \sigma$.

Das weist auf einen Resonanzeffekt hin und besagt, daß, wenn der Aufbau der Troposphäre so ist, daß $2\,\beta = \sigma$ ist, d. h. daß die Periode der oberen Welle gleich wird einer Periode einer gleichlangen Welle in der Troposphäre, die Amplitude der Tiefdruckbahnen sehr groß wird (theoretisch unendlich); gleichzeitig wird aber auch, wie man weiß, die Amplitude der Druckschwankungen am Boden sehr groß. Es ist somit bei der Steuerung auch ein Einfluß des Aufbaues der Troposphäre vorhanden, eine Tatsache, die später noch behandelt wird (S. 215ff.).

Ist $\sigma < 2\,\beta$, so ist die Differenz positiv und die meridionale Schwankung der relativen Tiefdruckbahn geht gleichsinnig mit der entsprechenden meridionalen Verlagerung der Höhenisobaren.

Ist $\sigma > 2\,\beta$, so ist die Differenz negativ und das Umgekehrte ist der Fall; Höhenisobaren und relative Tiefdruckbahn am Boden verlaufen invers.

Eine Steuerung tritt durch die Höhendruckverteilung also nur dann ein, wenn σ wesentlich kleiner als $2\,\beta$, also die Periode der oberen primären Druckschwankung groß ist; das bedeutet, daß die Druckverteilung in der Höhe quasistationär ist. Dieses Ergebnis deckt sich in allen Punkten mit den Erfahrungstatsachen aus der Praxis. Es entspricht völlig den Anschauungen v. Fickers über die steuernde Wirkung von stationären Luftdruckverteilungen in der Höhe auf troposphärische Tiefdruckgebiete. Eine nähere Erläuterung dieses wichtigen theoretischen Ergebnisses wird bei der zahlenmäßigen Auswertung der obigen Beziehungen gegeben werden.

Streng zu unterscheiden von der relativen Bahngleichung ist die Gleichung der Bahn der Tiefdruckgebiete am Boden, wie sie durch die Gl. IX_{15} gegeben ist. Sie stellt die tatsächliche Bewegung des Zentrums der Bodenstörungen im Laufe der Zeit dar. Die Wellenlänge L dieser Bahn, d. h. die Entfernung in λ, nach der die Depression genau dieselbe Lage einnimmt wie beim Beginn der Bahn, ergibt sich aus der Gleichung zu

$$L = \frac{180^\circ}{1 - \frac{\sigma}{2\beta}} = 257 \text{ Längengrade.} \qquad (IX_{21})$$

Aus den Bodendruckkarten kann man die Bahn der Tiefdruckgebiete ermitteln und genau finden, daß sie eine Wellenlänge von 257 Längengraden besitzt. Die Amplitude dieser Bahn ergibt sich wieder zu

$$V = \frac{4\gamma}{2\beta - \sigma} \cdot C = 0{,}249$$

oder die totale Schwankung in der geographischen Breite beträgt 14,6 Breitengrade.

d) Zahlenmäßige Auswertung der Bahngleichungen der vier Bodenstörungen und Diskussion der Frage der Steuerung.

Die zahlenmäßige Auswertung der relativen Bahngleichung hat für die vier Tiefdruckgebiete am Boden folgende Formen:

1. Tief $\cos 2\varphi_m + 0{,}249 \cos (2\lambda_m - 9^\circ t) = +0{,}079$
2. Tief $\cos 2\varphi_m + 0{,}249 \cos (2\lambda_m - 9^\circ t) = -0{,}263$
3. Tief $\cos 2\varphi_m + 0{,}249 \cos (2\lambda_m - 9^\circ t) = -0{,}273$
4. Tief $\cos 2\varphi_m + 0{,}249 \cos (2\lambda_m - 9^\circ t) = +0{,}089,$ (XI_{21})

während die Gleichung der Isobaren in der Höhe

$$\cos 2\varphi + 0{,}1428 \cos (2\lambda - 9^\circ t) = \text{const} \qquad (IX_{22})$$

lautet. (In allen Gleichungen ist die Zeit t in Tagen ausgedrückt.)

Berechnet man sich aus den λ_m-Werten der Tabelle 6 und den zeitentsprechenden λ_{max}-Werten der Höhenisobaren die Werte Δ (siehe Gl. IX_{17}) und trägt man sich die Werte graphisch auf, zusammen mit den zeitentsprechenden φ_m-Werten der Tabelle 6, so erhält man die in Abbildung 11 dargestellten relativen Bahnkurven der vier Tiefdruckgebiete.

Man erkennt aus der Abbildung 10 mit großer Deutlichkeit, daß die Bewegung der Tiefdruckkerne am Boden völlig von der Druckverteilung in der Höhe gesteuert werden, sich somit auf der Ostseite eines quasistationären Hochdruckgebietes in der Höhe nach Süden, auf der Westseite hingegen nach Norden bewegen. Umgekehrt auf der Ostseite (Vorderseite) eines quasistationären Tiefdruckgebietes in der Höhe nach Norden, auf der Westseite (Rückseite) hingegen nach Süden bewegen. Dies entspricht vollständig, wie schon oben erwähnt wurde, den v. Fickerschen Anschauungen (siehe S. 151 ff.) über Steuerung und den immer wieder in der Praxis gemachten Erfahrungen bei stationären Hoch- und Tiefdrucklagen in der Höhe.

Von großem Interesse ist es auch noch, die Frage der Steuerung im früher behandelten Falle 3 in gleicher Weise zu untersuchen. Im Fall 3

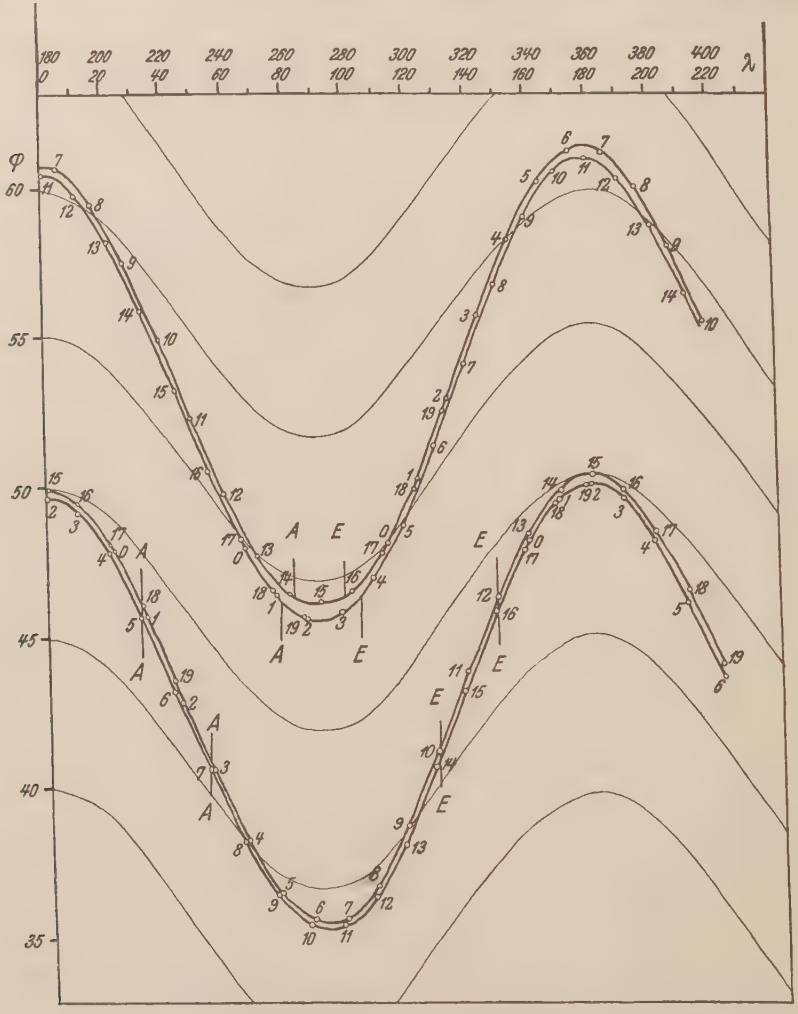


Abb. 10. Bahnkurven der 4 Bodendruckstörungen relativ zu der stationären Höhendruckverteilung. (Die 4 Bahnkurven sind dick ausgezogen; von oben gezählt folgen einander die Bahnkurven der 3., 2., 1. und 4. Bodendruckstörung; die kleinen Kreise zeigen die Lage des Zentrums der Bodenzyklone an dem mit einer Zahl angegebenen Tag; die senkrechten Striche zeigen die Spaltungsbeginne *A* und die Spaltungsenden *E* jeder Störung. Die obere stationäre Druckverteilung ist durch Isobaren [dünn ausgezogen] in 60, 55, 50 . . . 30 Grad Breite dargestellt.)

bewegte sich die obere Druckwelle rascher als die Bodendruckverteilung und es hat sich schon bei der Diskussion der entsprechenden Druckverteilungen ergeben, daß in diesem Falle von einer Steuerung durch die

obere Druckverteilung in keiner Weise gesprochen werden kann. Die genauere zahlenmäßige Durchrechnung des Falles 3 nach obiger Methode bestätigt dies und man ersieht aus Abbildung 11 sofort, daß die relative Bahn der Tiefdruckgebiete am Boden keine Beziehung zur oberen Druckverteilung besitzt.

Es muß jedoch auch hier daran erinnert werden, daß man es in diesem Falle 3 nicht mit Verschiebungen der Bodenstörungen als Ganzes zu tun

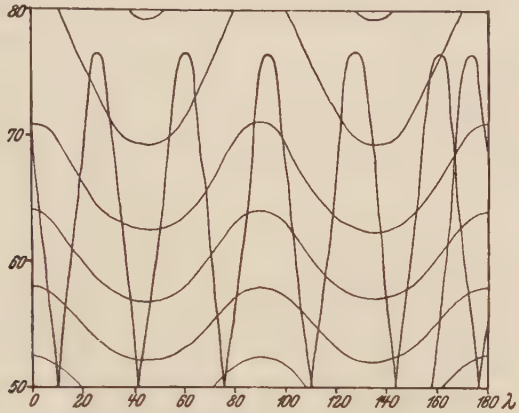


Abb. 11. Bahnkurve des Bodentiefdruckgebietes des Falles 3 (kurzperiodische Kurven), relativ zu der stationären Höhendruckverteilung (langperiodische Kurven).

hatte, wie es bei einer Steuerung erfolgen müßte, sondern sich lediglich der innerste Kern bei Ausweitung bzw. Schrumpfung des Gesamtgebietes der Störungen in meridionaler Richtung bewegt.

Man könnte vielleicht der Ansicht sein, daß auch die in der Bodendruckverteilung des Falles 5 vorhandene größere langperiodische Druckschwankung der Troposphäre (d. i. die Welle 6,65 cos $(2\,\lambda - 2\,\beta\,t) + 155°$), siehe Gl. $VIII_1$) eine steuernde Wirkung auf die Bodenstörungen ausüben könnte. Eine entsprechende Untersuchung nach gleicher Methode ergab aber, wie man von vornherein nach den vorstehenden Ergebnissen nicht anders erwarten konnte, ein völlig negatives Ergebnis.

Die steuernde Wirkung geht bei stationären Hoch- und Tiefdrucklagen in der Stratosphäre nur von der oberen Druckverteilung aus.

X. Intensitätsschwankungen der Bodenstörungen.

In der Tabelle 6 ist für alle 20 Tage der Kerndruck p_m aller vier Bodenstörungen in mm Hg angegeben, der aus den Bodenkarten durch möglichst genaue Schätzung entnommen ist. Man erkennt aus den Zahlenwerten, daß der Luftdruck im Kerne der Bodentiefdruckgebiete erheblichen Intensitätsschwankungen unterworfen ist. Er erreicht maximal den Wert 765,4 und minimal den Wert 745,6 mm Hg.

Die Werte entsprechen reinen cos-Funktionen; die extremen Werte der Störung 1 sind gegenüber denen der Störung 2 um eine Viertelwellenlänge nach rückwärts verschoben. Das Gleiche gilt für die Störung 3 gegenüber der Störung 2 und der Störung 4 gegenüber 3. Es haben demnach die Kurven des Bodentiefdruckgebietes 1 und 3 bzw. 2 und 4 inversen Verlauf. Alle vier Kurven besitzen die gleiche Amplitude und die Gleichungen der vier Wellen lauten:

$$
\begin{aligned}
p_m^{\,1} &= 761{,}8 + 3{,}65 \sin \frac{2\pi}{17{,}14}\,(t - 2{,}14),\\
p_m^{\,2} &= 752{,}5 + 3{,}65 \sin \frac{2\pi}{17{,}14}\,(t - 15{,}00),\\
p_m^{\,3} &= 749{,}2 + 3{,}65 \sin \frac{2\pi}{17{,}14}\,(t - 10{,}71),\\
p_m^{\,4} &= 757{,}5 + 3{,}65 \sin \frac{2\pi}{17{,}14}\,(t - 6{,}42); \quad \frac{2\pi}{17{,}14} = 2\beta - \sigma.
\end{aligned}
\qquad (X_1)
$$

In der Tabelle 6 ist neben den p_m-Werten eine Spalte enthalten, in der Pfeile und waagrechte Striche verzeichnet sind. Nord- bzw. Südkomponente der Bewegung der Störung zeigt der Pfeil zur entsprechenden Zeit an. Je nach Größe der Bewegung ist der Pfeil dünn oder dick. Die waagrechten Striche geben an, daß nur geringe oder gar keine Nord- bzw. Südverlagerung der Störungen stattfindet.

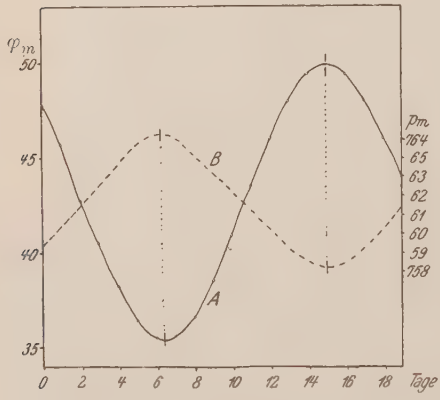


Abb. 12. Beziehung zwischen der zeitlichen Änderungskurve der geographischen Breite φ_m und des Kerndruckes p_m der Bodenstörung 1 des Falles 5. (A = Kurve φ_m/t.) (B = Kurve p_m/t.)

Ein Vergleich der Pfeile mit den p_m-Werten zeigt, daß immer die geringste Bewegung in Nord- bzw. Südrichtung mit den extremen Werten des Kerndruckes zusammenfallen, und zwar fällt das Maximum des Kerndruckes (flachster Zustand der Depression) mit der südlichsten Lage und das Minimum des Kerndruckes (tiefster Zustand der Depression) mit der nördlichsten Lage der Störungen zusammen. Die stärksten Nord- bzw. Südverlagerungen der Bodenstörungen aber gehen parallel mit den mittleren p_m-Werten, und zwar hängen die Nordverlagerungen mit dem abnehmenden Kerndruck, die Südverlagerungen mit dem zunehmenden Kerndruck zusammen.

Diese Beziehung kann man unmittelbar aus der Gegenüberstellung der zeitlichen Änderungskurven der geographischen Breite φ_m des Kernes und des Kerndruckes p_m der Bodenstörung 1 in Abbildung 12 erkennen. Analoges gilt für die übrigen Störungen.

Es zeigt sich also, daß bei Vorhandensein einer quasistationären Höhendruckverteilung folgende Beziehungen gültig sind: Einer Steuerung nach Süden entspricht stets ein Auffüllen der troposphärischen Störungen und umgekehrt einer Steuerung nach Norden stets ein Vertiefen derselben. Dabei verlagert sich die Depression, während des Überganges von ihrer maximalen zu ihrer minimalen Tiefe, also während sie mittlere Kerndruckwerte zeigt, am stärksten nord- bzw. südwärts.

Bei der Frage der Intensitätsänderungen spielt, wie A. Defant in seiner Arbeit über primäre und sekundäre Druckwellen theoretisch gezeigt und vorher schon H. v. Ficker aus den Beobachtungen abgeleitet hat, die Neigung der sogenannten Achse der Depression eine große Rolle. Ganz allgemein zeigt sich in der Synoptik, daß einer Rückwärtsneigung (im Sinne der Fortpflanzungsrichtung) eine Vertiefung, einer Vorwärtsneigung der Achse eine Verflachung der Zyklonen am Boden entspricht.

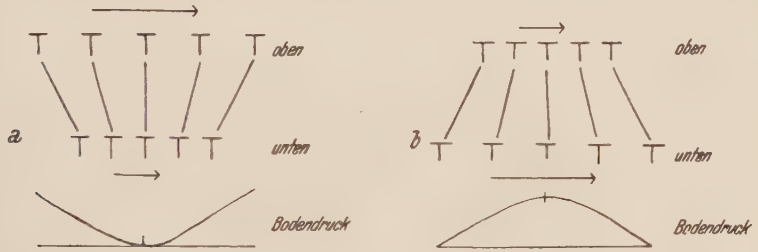


Abb. 13. Schematische Darstellung zweier verschiedener Fälle von Bewegung der oberen und unteren Druckstörungen und die sich daraus ergebende unterschiedliche Druckänderung am Boden. a) Höhentief bewegt sich schneller als Bodentief von W nach E; b) Höhentief bewegt sich langsamer als Bodentief von W nach E. Darunter schematischer Verlauf der Bodendruckänderung.

Bei der Anwendung dieser Regel muß beachtet werden, ob die Depression in der Höhe (primäre Welle) schneller bzw. langsamer sich fortbewegt als die Druckstörung am Boden (sekundäre Welle). Diese zwei Fälle sind in der Abbildung 13 schematisch zur Darstellung gebracht.

Im Falle a (rascher bewegte obere Zyklone) sind aufeinanderfolgende Stadien der Lage der Tiefdruckkerne oben und unten gegeneinander durch T (oben) und T (unten) dargestellt. Zuerst ist die Achse der Zyklone nach rückwärts geneigt, dann steht die Achse vertikal, und schließlich ist sie nach vorne geneigt. Dementsprechend vertieft sich die Zyklone im Laufe der Zeit bis zur senkrechten Achsenlage, dann füllt sie sich auf. Eine Druckkurve unter der Zeichnung gibt die Druckänderung am Boden für einen Beobachter, der sich mit der unteren Zyklone fortbewegt. Dies entspricht dem Fall, wie ihn A. Defant in seinem Zahlenbeispiel behandelt hat.

Der zweite Fall b verhält sich anders. In ihm bewegt sich die obere Depression langsamer als die untere troposphärische Störung, bzw. laufen die Bodenstörungen unter den quasistationären Höhendruckverteilungen hindurch und überholen diese. In diesem Falle ist die Achsenneigung zuerst nach vorne gerichtet, später nach rückwärts.

Eine herankommende Depression am Boden füllt sich der Regel entsprechend auf, erreicht ihre geringste Intensität bei senkrechter Achsenlage und vertieft sich dann nach Überholung des oberen Tiefs. Die Druckkurve unter der Zeichnung zeigt wieder die Druckänderung, die ein Beobachter, der mit der Bodenstörung mitwandert, wahrnimmt.

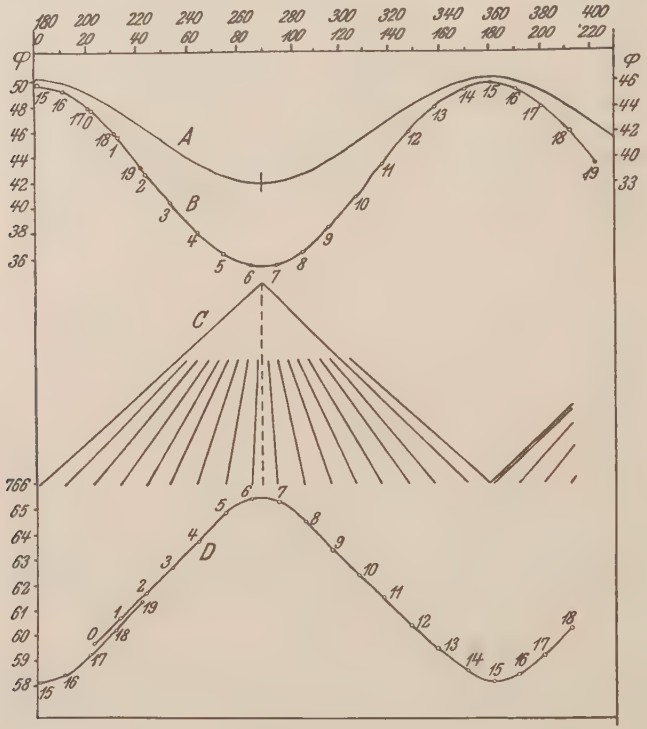


Abb. 14. Beziehung zwischen Achsenlage Bodentief—Höhentief der Bodenstörung 1 und der Kerndruckänderung desselben Bodentiefs des Falles 5 (entsprechend Abb. 15). A = obere Druckwelle (stationär); B = relativ zu A verlaufende Bahn der Bodenstörung 1; C = Achsenlage Bodentief—Höhentief an den einzelnen Tagen 0 bis 19; D = Kerndruckänderung an den einzelnen Tagen 0 bis 19.

Sie ist gerade umgekehrt wie im Falle a und man erkennt, daß bei senkrechter Achsenlage die Bodenstörung nun am schwächsten ausgebildet ist.

Diese Verhältnisse müssen in dem hier behandelten Fall 5 auftreten und die Durchsicht der Karten bestätigt vollständig obige Überlegungen. Eine Abbildung 14 für das Bodentief 1 möge ein Beispiel für die Beziehung zwischen Achsenlage und Intensitätsänderung der Bodenstörungen sein.

Die Abbildung zeigt oben die für einen Beobachter, der mit der Höhendruckverteilung sich fortbewegt, feststehende Druckwelle in der Höhe (A) mit ihrem Minimum bei $\lambda = 90°$ Länge. Darunter ist die relativ zu der stationären Höhendruckverteilung ermittelte Bahn der

Tiefdruckgebiete am Boden (B) wiedergegeben. Unter dieser Kurve ist die Achsenlage Bodentief—Höhentief für die einzelnen Tage 0 bis 19 (C) eingezeichnet und darunter die Kurve des Kerndruckes p_m (D) der Bodenstörung 1 wiedergegeben. Man erkennt, daß bei Vorwärtsneigung der Achse die Depression sich auffüllt, ihren flachsten Stand (zwischen 6. und 7. Tag) bei senkrechter Achsenlage erreicht und bei Rückwärtsneigung der Achse sich bis zu dem Zeitpunkt (knapp vor dem 15. Tag) vertieft, in dem die Bodenstörung eine nähere Lage zum nächsten Minimum der Höhendruckwelle hat als zu dem rückwärts von ihr liegenden Minimum;

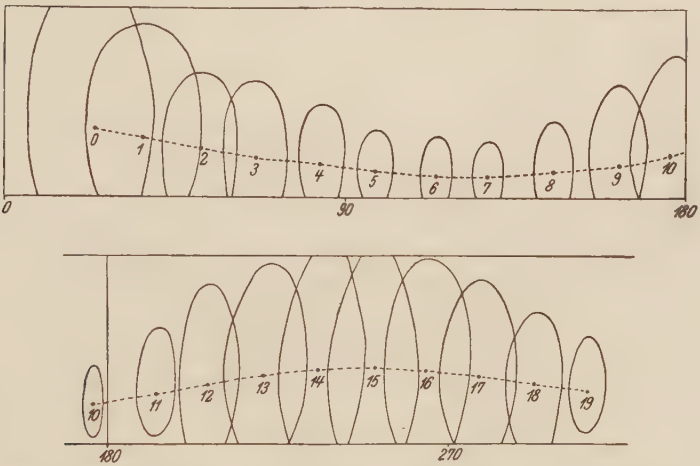


Abb. 15. Flächenhafte Verlagerung der Bodenstörung 1 des Falles 5 durch alle Tage 0 bis 19, dargestellt durch Verfolgung einer bestimmten Isobare. (Isobare 766 mm Hg bei den Tagen 0 bis 10, Isobare 763 mm Hg bei den Tagen 10 bis 19.) (Gestrichelte Linie gleich Zentrumsbahn; siehe zum Vergleich die entsprechende Darstellung des Falles 3, Abb. 5.)

die Achse also demnach von einer Rückwärtsneigung sprunghaft in eine Vorwärtsneigung übergeht. Von diesem Zeitpunkt an beginnt, gemäß der Regel, die Depression sich wieder aufzufüllen.

Aus den Bodendruckkarten (Abbildung 8) läßt sich weiter entnehmen, daß mit der Schwankung der Intensität des Druckkernes, die wir bis jetzt betrachtet haben, auch eine entsprechende Intensitätsschwankung des ganzen Tiefdruckgebietes in seiner flächenmäßigen Ausdehnung verbunden ist, die besonders charakteristisch für die Umwandlung und Lebensgeschichte der wandernden Depressionen ist. Bei der zeichnerischen Auswertung des Falles 3, bei dem, wie schon hervorgehoben, keine Steuerung der Tiefdruckgebiete am Boden vorhanden war, existierte keine solche Gesamtverlagerung der Fläche der Depressionen samt Kern (siehe S. 165).

Eine solche Verlagerung ist somit ein charakteristisches Merkmal für das Vorhandensein einer Steuerung. Um diese Tatsache besser hervortreten zu lassen, ist in Abbildung 15 die flächenhafte Ausdehnung der

Depression 1 an jedem Tag durch eine ausgewählte Isobare gekennzeichnet. Und zwar ist für die Tage 0 bis 10, an denen sich die Depression in einem allgemein flachen Stadium ihrer Entwicklung befindet, die Isobare von 766 mm Hg als solche Umgrenzung der Störung 1 gewählt worden. Im weiteren Verlauf ihrer Entwicklung, wo sie sich zusehends vertieft und ihre Fläche ausweitet, ist die Isobare von 763 mm Hg wesentlich geeigneter.

Man erkennt deutlich

1. die Verlagerung des Tiefdruckkernes als solche und

2. die damit verbundene Schrumpfung bzw. Ausweitung des Zyklonenbereiches und

3. die Verlagerung dieses Tiefdruckbereiches mit der Richtung der Kernbahn.

Dies ist ein weiterer Beweis für das Vorhandensein einer echten Steuerung in früher festgelegtem Sinne.

Damit ist der Zusammenhang zwischen Intensitätsschwankung der Tiefdruckgebiete am Boden und ihre Steuerung erwiesen.

Außer diesen Intensitätsänderungen zeigt die Durchsicht der Luftdruckkarten am Boden, daß die Bodenstörungen in ihrer horizontalen Ausbildung nicht gleichmäßig entwickelt sind. Die Druckgradienten auf der Vorderseite und der Rückseite der Depressionen sind nicht gleich, sondern sie zeigen Unterschiede in ihrer Stärke, die, wie es den Anschein hat, ebenfalls mit der Entwicklungsgeschichte der Tiefdruckgebiete, also auch mit seiner Steuerung, zusammenhängen.

Man kann diese Erscheinung auch zahlenmäßig zu erfassen versuchen, dadurch, daß man sowohl auf der Vorderseite als auch auf der Rückseite der Depressionen am Boden in passender Weise mittlere Druckgradienten in einer Entfernung von etwa 10°, vom Zentrum aus gerechnet, aus den Bodendruckkarten entnimmt. Bildet man den Unterschied Δ dieser mittleren Gradienten (Vorderseite weniger Rückseite), so erhält man für die einzelnen Tage die in Tabelle 6a angeführten Werte (die Werte sind mm Hg pro 7,5 Grad Länge).

Aus der Tabelle 6a kann man entnehmen:

1. Es ist fast immer der Gradient auf der Rückseite stärker als jener auf der Vorderseite. Dies ist eine bekannte Erscheinung der Synoptik.

2. In ganz auffallender Weise zeigt sich eine ganz deutliche Schwankung in dem Gradientunterschied Δ zwischen Vorder- und Rückseite, und zwar im absteigenden Aste der Zyklonenbewegung (SE-Steuerung, Auffüllen der Zyklone) sind die Gradienten an der Vorderseite relativ groß und zeitweise sogar übertreffen sie etwas die Rückseitengradienten. Die Druckgradientunterschiede zwischen Vorder- und Rückseite sind in diesem Stadium klein. Das ist wieder eine bekannte Erscheinung der Synoptik: In absterbenden Zyklonen gleichen sich die Gradienten der Vorder- und Rückseite nahezu aus. Im aufsteigenden Aste der Zyklonenbewegung (NE-Steuerung, Vertiefung der Zyklone) erreichen die Druckgradientunterschiede zwischen Vorder- und Rückseite die größten Beträge, d. h. die Gradienten der Rückseite übertreffen weit jene der Vorderseite. Auch dies ist wieder eine bekannte Tatsache des praktischen Wetter-

Tabelle 6a.

Tage	φ_m		Δ	Abweichung vom Mittel — 1,4
0	47,8°		— 0,5	+ 0,9
1	45,7°		0	+ 1,4
2	42,7°	SE-Steuerung	+ 0,4	+ 1,8
3	40,5°	Verflachung	+ 0,2	+ 1,6
4	38,1°	der Zyklone	— 0,2	+ 1,2
5	36,4°		— 0,9	+ 0,5
6	35,5°		— 1,4	0
7	35,5°		— 2,2	— 0,8
8	36,5°		— 2,7	— 1,3
9	38,5°		— 3,1	— 1,7
10	40,9°	NE-Steuerung	— 3,4	— 2,0
11	43,5°	Vertiefung	— 3,4	— 2,0
12	46,0°	der Zyklone	— 3,1	— 1,7
13	48,0°		— 2,6	— 1,2
14	49,4°		— 2,0	— 0,6
15	49,9°		— 1,5	— 0,1
16	49,4°		— 0,9	+ 0,5
17	48,0°	SE-Steuerung	— 0,3	+ 1,1
18	46,0°	Verflachung	+ 0,1	+ 1,5
19	43,5°	der Zyklone	+ 0,2	+ 1,6
			Mittel = — 1,4	

dienstes: Eine sich vertiefende Zyklone hat auf ihrer Rückseite die stärksten Druckgradienten (GROSSMANNsche Regel, die Zyklone bewegt sich in der Richtung des geringsten Widerstandes).

XI. Spaltung bzw. Teilung der Bodenstörungen.

a) Feststellung der Spaltung, Spaltungsdauer und Spaltungszeit aus den Bodendruckkarten.

Wie schon früher erwähnt (S. 187), zeigt sich sowohl in den Bodendruckkarten als auch in den 24stündigen Druckänderungskarten am Boden eine merkwürdige Teilung der Tiefdruckgebiete und der Druckänderungsgebiete. Es bewegt sich dabei die Zyklone nach Süden bzw. Südosten und es bildet sich ein schmaler Hochdruckrücken im Norden von ihr aus. Wiederum nördlich von diesem rückt tieferer Druck von NW her mit der SE-Bewegung der Hauptdepression verstärkt ins Kartenbild. Man hat demnach den Eindruck, als ob die ehemals weiter im Norden liegende Hauptzyklone mit ihren mehr oder weniger kreisförmigen Isobaren im Verlaufe ihrer SE-Bewegung sich in zwei Tiefdruckgebiete zerteilt, die durch eine West—Ost verlaufende Hochdruckbrücke getrennt sind. Diesen Spaltungsvorgang wollen wir nun einer speziellen Untersuchung unterziehen.

Eine rohe Durchsicht aller Bodendruckkarten im Hinblick auf solche Spaltungsvorgänge zeigt, daß die Störung 1 zwischen dem Anfangstag und dem 1. Tag eine solche Teilung erleidet, diese sich bis zum 7. Tag fortlaufend verstärkt und dann erst bis zum 12. Tag abschwächt, an welchem das Ende der Spaltung erreicht ist. Dieselbe Störung 1 teilt sich erneut am 18. Tag. Die Störungen 2 und 3 zeigen Ansätze zu solchen Teilungen in 80° Breite vom 1. bis zum 3. Tag bzw. 14. bis 16. Tag, wenn auch hier von einer so ausgesprochenen Teilung, wie sie die Störung 1 während der Dauer von zirka 11 Tagen aufzeigt, nicht gesprochen werden kann. Die Störung 4 teilt sich am 5. Tag und bleibt bis zum 16. Tag in geteiltem Zustande, dessen stärkste Entwicklung am 10. und 11. Tag

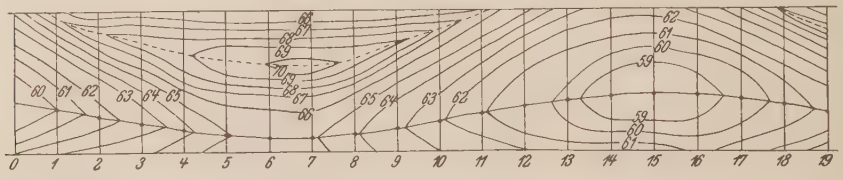


Abb. 16. Darstellung der Spaltung der Bodenstörung 1 (senkrechte Striche geben die meridionale Achsenlage der Bodenstörung 1 an den einzelnen Tagen wieder. Die Isolinien verbinden alle gleichen Schnittpunkte der Isobaren mit diesen Achsen. Die gestrichelte Linie zeigt die Verlagerung des Spaltungshochdruckrückens, der die beiden Tiefdruckgebiete trennt. Die untere ausgezogene Linie ist die Bahn des Zentrums der Hauptzyklone).

vorhanden ist. Also dauert die Spaltung entsprechend der Teilung der Störung 1 auch hier zirka 11 Tage.

Während sich die Spaltungserscheinungen bei der Störung 2 und 3 nur auf die geographische Breite 80° beschränken und schwer erkennbar sind, reichen die Teilungen der Störungen 1 und 4 bis zum zirka 60. Breitengrad nach Süden und sind daher leicht nachweisbar und deutlich erkennbar.

Dies soll an Hand von einigen Darstellungen (Abbildung 16, 17 und 18) noch besser erläutert werden.

In dieser Abbildung 16 ist die Lage der senkrechten Achse durch die Bodenstörung 1 für alle 30 Tage eingetragen. An jeder solchen Achse wurden die Schnittpunkte der Achse mit den einzelnen Isobaren und das Zentrum der Störung mit einem kleinen Kreis verzeichnet. Verbindet man nun alle gleichen Schnittpunkte mit Isolinien (das sind aber keine Isobaren!), so zeigt die Darstellung in klarer Weise die Teilung der Störung. Es gibt die untere Linie die Bahn des Störungszentrums, die obere gestrichelte Linie die Lage bzw. Verschiebung des Hochdruckrückens, welcher die Hauptzyklone von dem oberen Tiefdruckgebiet trennt, an. Dort, wo diese letzte Linie von Norden in das Kartenbild eintritt (zirka 1. Tag), ist der Spaltungsbeginn; dort, wo sie nach Norden aus dem Kartenbild austritt, ist das Spaltungsende (zirka 12. Tag). Man erkennt weiter den erneuten Spaltungsbeginn (zirka 18. Tag) der Störung 1. Das obere Tiefdruckgebiet erreicht bei seinem stärksten Entwick-

lungsstand am 7. Tag eine Kerntiefe von fast 765 mm Hg, welche nur in diesem Stadium der Kerntiefe der Hauptzyklone annähernd gleichkommt.

Ein analoges Bild zeigt die Abbildung 17 für das der Bodenstörung 1 entsprechende präzyklonale 24stündige Druckfallgebiet.

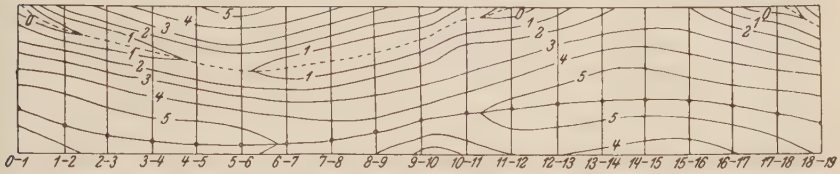


Abb. 17. Darstellung der Spaltung des der Bodenstörung 1 entsprechenden präzyklonalen Druckfallgebietes. (Meridionale Linien geben die Achsenlage des Druckfallgebietes an den einzelnen Tagen wieder. Die Isolinien verbinden alle gleichen Schnittpunkte der Isallobaren mit diesen Achsen. Die gestrichelte Linie zeigt die Verlagerung des Spaltungsrückens an, der die beiden Fallgebiete nach der Spaltung trennt. Die untere ausgezogene Linie ist die Bahn des Zentrums des Druckfallgebietes.)

Wieder wurde die Achsenlage des Fallgebietes 1 zu den verschiedenen Terminen eingetragen und an jeder dieser Achsen die Schnittpunkte mit den Isallobaren verzeichnet. Linien gleicher Schnittpunkte (dies sind aber keine Isallobaren!) geben ein der Abbildung 16 entsprechendes Bild, welches die Teilung des Fallgebietes 1 in klarer Weise aufzeigt.

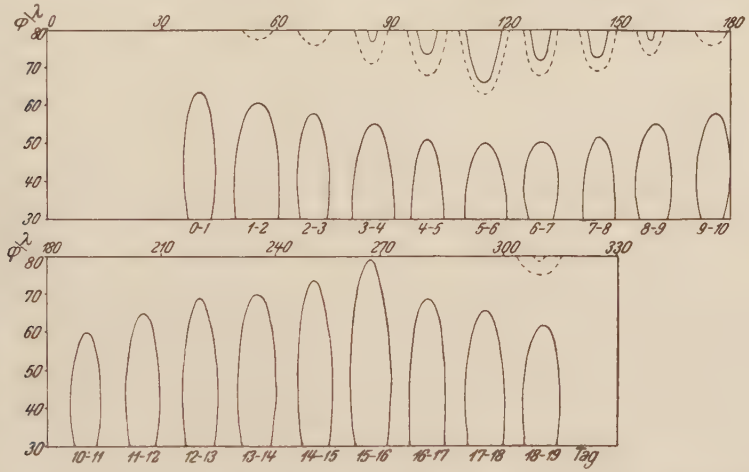


Abb. 18. Flächenhafte Verlagerung des Druckfallgebietes 1 des Falles 5 durch alle Termine hindurch, dargestellt durch Verfolgung der Isallobare von — 3 mm Hg. (Gestrichelte Linien sind die Isallobaren — 1 und — 2 mm Hg, die ebenfalls teilweise eingezeichnet wurden, um den Spaltungsvorgang besser kenntlich zu machen.)

Eine weitere Darstellung (Abbildung 18) zeigt die Verfolgung einer Isallobare des gleichen Fallgebietes durch alle Termine hindurch, und zwar wurde die Isallobare von — 3 mm gewählt, die besonders deutlich die Spaltung in Erscheinung treten läßt.

Analoge Darstellungen für die übrigen Bodentiefdruckgebiete bzw. Druckfallgebiete lassen sich in gleicher Weise herstellen und geben die Erscheinung der Spaltung in gleich klarer Weise wieder.

Beim Lösungsgang des vorliegenden Falles wurde Bezug genommen auf die Möglichkeit des Auftretens von imaginären Werten (S. 178, Gl. VII_8), in dem der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen der Lösungsgleichung VII_9 für bestimmte Werte von φ bei entsprechender Phasenlage der oberen und unteren Wellen negativ wird. Für diese speziellen Werte des Bodendruckes wurde gezeigt, daß eine andere Lösungsform notwendig ist und

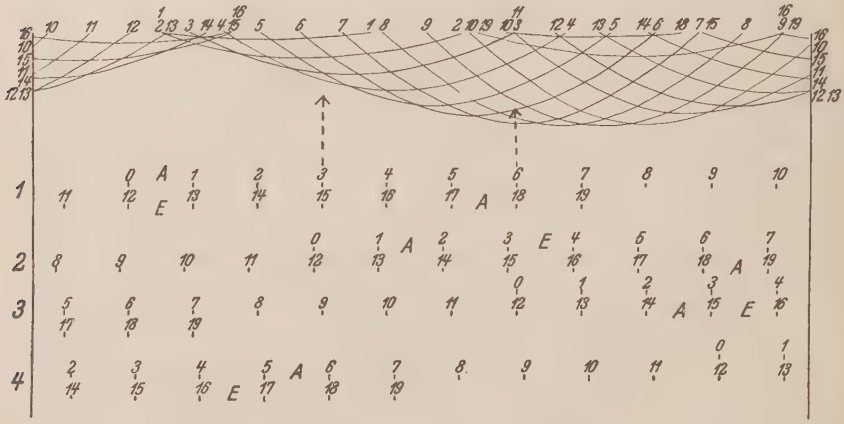


Abb. 19. Imaginäre Werte in Form von Kurvenstücken für jeden einzelnen Tag zur Bestimmung des Spaltungsbeginnes *A* und des Endes *E* jeder der 4 Bodentiefdruckgebiete. (Die kleinen, mit Zahlen bezifferten Striche zeigen die Lage jeder Störung in bezug auf die geographische Länge λ an. Geht man von einem solchen Strich senkrecht zu dem darüber liegenden Kurvenstück des gleichen Tages, so zeigt das Vorhandensein, bzw. das Fehlen eines solchen Kurvenstückes an, ob die Bodenstörung gespalten oder nicht gespalten ist. Z. B. über dem 6. Tag der Störung 1 ist eine Kurve 6 vorhanden, die Störung 1 ist also am 6. Tag gespalten. Über dem 15. Tag dagegen ist keine Kurve 15 vorhanden, die Störung 1 ist am 15. Tag ungespalten.)

es ergab weiter eine kritische Betrachtung dieser speziellen Werte, daß sie ohne Ausnahme identisch mit dem oberen Tiefdruckgebiet bei dem Teilungsvorgang sind. Die Annahme lag daher nahe, daß gerade das Imaginärwerden des Wurzelausdruckes der Lösungsgleichung VII_9 der mathematische Ausdruck für den festgestellten Vorgang der Spaltung ist.

Diese zunächst nur unsichere Vermutung eines Zusammenhanges zwischen dem Imaginärwerden des Wurzelausdruckes der Lösungsgleichung VII_9 und den auftretenden Spaltungen der Bodenstörungen wurde einer Prüfung unterzogen. Bei der Berechnung des Falles 5 war es selbstverständlich nötig, für alle Zeiten t und alle geographischen Längen und Breiten den Ausdruck

$$[V\{\cos(2\lambda - \sigma t) - \cos(2\lambda - 2\beta t)\} + \cos 2\varphi]^2,$$

worin $V = \frac{4\gamma}{2\beta - \sigma} \cdot C$ ist, auszuwerten. Wird er größer als 1, so wird der Gesamtausdruck unter der Wurzel negativ und der Wurzelausdruck imaginär.

Trägt man sich, wie Abb. 19 zeigt, diese Werte > 1 für die Breite 80° graphisch für alle Tage auf, so kann man an Hand der Kurvenstücke jedes Tages ablesen, für welche geographische Länge λ der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen der Lösungsgleichung imaginär ist. Trägt man sich darunter die Lage der einzelnen Bodenstörungen 1 bis 4 an den verschiedenen Tagen auf, so kann man sofort erkennen, zwischen welchen Tagen die einzelnen Störungen einer Spaltung unterliegen und wo der Spaltungsanfang A und das Ende E auftritt.

Z. B. geht man vom 0. Tag der Störung 1 senkrecht nach oben zur Kurve des 0. Tages, so ist diese nicht imaginär, also ist die Störung 1 am 0. Tage nicht gespalten. Geht man aber vom 1. Tag senkrecht zur entsprechenden Kurve des 1. Tages, so ist diese imaginär, also ist die Störung 1 am 1. Tage bereits gespalten. Demnach hat die Störung 1 zwischen dem Anfangstag und dem 1. Tag einen Spaltungsbeginn A.

Man findet aus dieser Darstellung folgende rohe Spaltungsdaten (Tabelle 7), die wir bereits durch reine Anschauung den Bodenkarten entnommen haben (für die Breite 80°, oberer Kartenrand).

Tabelle 7.

Tief 1	Beginn:	zwischen	0. Tag	und	1. Tag
	Ende:	zwischen	12. Tag	und	13. Tag
	Neuer Beginn:	zwischen	17. Tag	und	18. Tag
Tief 2	Beginn:	zwischen	1. Tag	und	2. Tag
	Ende:	zwischen	3. Tag	und	4. Tag
	Neuer Beginn:	zwischen	18. Tag	und	19. Tag
Tief 3	Beginn:	zwischen	14. Tag	und	15. Tag
	Ende:	zwischen	15. Tag	und	16. Tag
Tief 4	Beginn:	zwischen	5. Tag	und	6. Tag
	Ende:	zwischen	16. Tag	und	17. Tag.

Alle diese Spaltungserscheinungen in 80° Breite lassen sich ohne Ausnahme den Bodenkarten entnehmen und damit erfährt die Vermutung eines Zusammenhangs zwischen imaginären Werten und Spaltung eine solch entscheidende Stütze, daß eine mathematische Untersuchung dieser Frage zur Ermittlung der genauen Spaltungszeiten in jeder Breite (80°, 70°, 60°) für jede Störung am Boden gerechtfertigt erscheint.

b) Theoretische Bedingung der Spaltung.

Die Bedingung dafür, daß der Wurzelausdruck in Gleichung imaginär wird, lautet

$$[V\{\cos(2\lambda - \sigma t) - \cos(2\lambda - 2\beta t)\} + \cos 2\varphi]^2 \geqq 1, \qquad (\mathrm{XI}_1)$$

worin $V = \dfrac{4\gamma}{2\beta - \sigma} \cdot C$ bedeutet.

Daraus ergibt sich

$$\pm [V\{\cos(2\lambda - \sigma t) - \cos(2\lambda - 2\beta t)\} + \cos 2\varphi] \geqq 1. \qquad (\mathrm{XI}_2)$$

Wie man leicht feststellen kann, liegt der Wert des Klammerausdruckes links zwischen den Grenzwerten $-1{,}438$ und $+0{,}998$, wenn man für V

den gegebenen Zahlenwert einsetzt. Man erkennt, daß damit nur das negative Vorzeichen vor dem Klammerausdruck Gültigkeit für die Ungleichung besitzen kann.

Es vereinfacht sich damit die Gleichung XI_2 auf

$$-[V\{\cos(2\lambda - \sigma t) - \cos(2\lambda - 2\beta t)\} + \cos 2\varphi] \geqq 1. \quad (XI_3)$$

Mit Hilfe der bekannten Beziehung $\lambda = \lambda_0 + \beta t$ (Gleichung IX_1) erhält man

$$-[V\{\cos[2\lambda_0 + (2\beta - \sigma) t] - \cos 2\lambda_0\} + \cos 2\varphi] \geqq 1. \quad (XI_4)$$

Eine weitere leichte Umformung ergibt

$$\cos\{2\lambda_0 + (2\beta - \sigma) t\} \geqq \frac{V\cos 2\lambda_0 - \cos 2\varphi - 1}{V}. \quad (XI_5)$$

Mit der Festsetzung für den konstanten Ausdruck rechts, der nur von φ und von den vier verschiedenen λ_0-Werten abhängig ist, wird

$$\frac{V\cos 2\lambda_0 - \cos 2\varphi - 1}{V} = \cos\alpha = b \quad (XI_6)$$

worin b eine Konstante und der Winkel α durch die Beziehung

$$\begin{aligned} \pm\alpha &= \arccos b \quad | \quad b > 0 \\ \pi \pm \alpha &= \arccos|b| \quad b < 0 \end{aligned} \quad (XI_7)$$

bestimmt ist. Daraus erhält man die beiden Beziehungen für die Zeit t

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2\beta - \sigma}(\pm\alpha - 2\lambda_0) \quad \text{für } b > 0, \\ t &= \frac{1}{2\beta - \sigma}(\pm\alpha - 2\lambda_0 + \pi) \text{ für } b < 0. \end{aligned} \quad (XI_8)$$

Damit ist es möglich, bei Kenntnis der λ_0-Werte jeder Störung nach rechnerischer Bestimmung der Winkel α aus Gleichung XI_6, die Anfangs- bzw. Endzeiten des Imaginärwerdens des Wurzelausdruckes der Gleichung VII_9 bzw. den Beginn und das Ende der Spaltung der Bodenstörung exakt zu berechnen.

Nachfolgende Tabelle 8 gibt für jede Störung 1 bis 4 am Boden die Werte λ_0, b und die Winkel α für die Breiten 80°, 70° und 60° wieder.

Tabelle 8.

	λ_0 \ φ	$b = \frac{V\cos 2\lambda_0 - \cos 2\varphi - 1}{V}$			α (cos $\alpha = b$)		
		80°	70°	60°	80°	70°	60°
Tief 1.	22,49°	+ 0,466	— 0,233	— 1,301	62,3°	180 — 76.5°	—
Tief 2.	65,69°	— 0,904	— 1,602	— 2,670	180 — 25,3°	—	—
Tief 3.	112,50°	— 0,948	— 1,606	— 2,715	180 — 18,6°	—	—
Tief 4.	159,31°	+ 0,422	— 0,207	— 1,418	65,0°	180 — 73,9°	—

Man erkennt, daß der Spaltungsvorgang sich bei keiner Bodenstörung bis zur geographischen Breite 60° nach Süden erstreckt und daß bei den Störungen 2 und 3 selbst die Breite 70° nicht erreicht wird. Eine Tatsache, die wir bereits erwähnt haben und die hier ihre mathematische Erklärung findet.

Wertet man mit Hilfe dieser α-Werte die Gleichung XI_8 aus, so ergeben sich folgende Zeiten in Tagen für den Beginn bzw. das Ende der Spaltungen der vier Bodenstörungen in den Breiten 80°, 70°, 60°. Die eingeklammerten Werte geben den nächsten Beginn einer Spaltung an, der später als die letzte berechnete 19. Tageskarte erfolgt.

Tabelle 9.

Bodentief	Breite 80°			Breite 70°		
	Beginn	Ende	Nächster Beginn	Beginn	Ende	Nächster Beginn
1	0,825	12,031	17,965	2,780	10,072	[19,920]
2	1,110	3,520	18,250			
3	14,110	15,890	[31,250]			
4	5,070	16,020	[22,210]	7,020	14,060	[24,160]

Einer zeichnerischen Auswertung der Gleichung XI_4 (Abb. 20) ist zu entnehmen, daß die in Tabelle 9 errechneten Zeiten auch auf graphischem

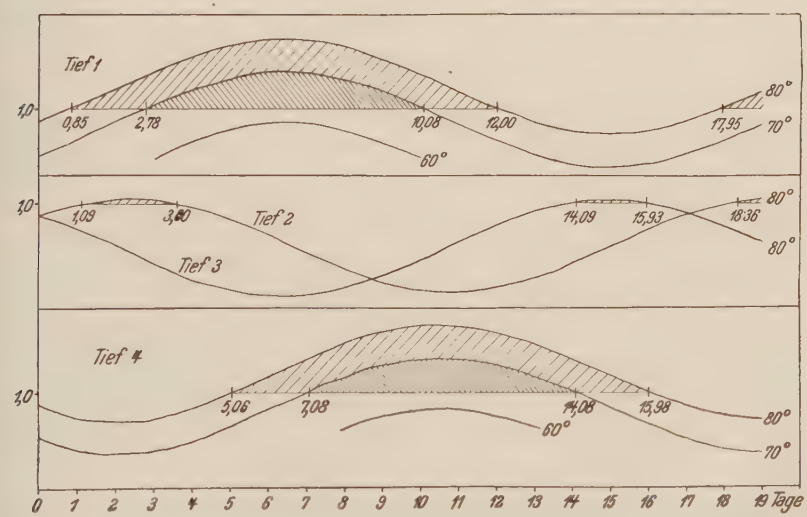


Abb. 20. Zeichnerische Auswertung der Spaltungsbedingung (Gl. XI_4) für die geographischen Breiten 80, 70 und 60 Grad. Schraffierte Flächen (Kurven größer als 1) geben die Dauer der Spaltung in jeder Breite, den Spaltungsbeginn und das Ende an. Die Zahlen zeigen die genauen Zeiten dieses Beginnes und Endes der Spaltung in Tagen an.

Wege präzise zu ermitteln sind. Es ergeben sich genau, wie nicht anders zu erwarten, dieselben Zeiten in den einzelnen Breiten. An Hand der dunklen Flächen der Abbildung 20 ist zu ersehen, mit welcher Intensität die Spaltung jeder Störung erfolgt.

Wir sind nun eingehend orientiert über den Beginn und das Ende der Spaltung in den Breiten 80° und 70° jeder der vier Bodenstörungen, und es ist nun von Interesse zu untersuchen, ob die Steuerung der Bodentiefdruckgebiete zu der Spaltung der Störungen in Beziehung steht und unter welchen Bedingungen solche Teilungen auftreten.

In der Darstellung (Abb. 10) sind die für einen mit der Höhendruckverteilung sich fortbewegenden Beobachter relativen Bahnen der vier Tiefdruckgebiete wiedergegeben. In diese Bahnen sind die Zeiten des Beginnes A und des Endes E der Spaltung der Bodenstörungen in 80° und 70° Breite, so wie sie die Tabelle 9 wiedergibt, durch senkrechte Striche eingetragen.

Man erkennt, daß alle Spaltungsbeginne A im absteigenden Teile der Tiefdruckbahn, d. h. bei einer Zyklonenbewegung mit Südkomponente, dagegen alle Enden der Spaltungen E im aufsteigenden Teil der Bahn, d. h. bei einer Bewegung der Zyklone mit Nordkomponente, erfolgen. Alle sich entsprechenden Beginne und Enden der Teilungen liegen genau symmetrisch zum südlichsten Bahnpunkt, d. h. wenn die Störung ihren südlichsten Punkt erreicht hat, ist sie am stärksten gespalten und das von NW her bei der Spaltung am Nordrand der Karte eingetretene zweite Tief hat in diesem Momente seine größte Erstreckung nach Süden und seine größte Intensität.

Man kann demnach vorerst schließen, daß, wenn eine Zyklone durch eine quasistationäre Druckverteilung in der Höhe nach Südosten gesteuert wird, d. h. wenn der hohe Druck der Höhendruckverteilung rechts von der Bahn der Bodenstörung, der tiefe Druck der Höhendruckverteilung links von ihr ist, so wird die Zyklone am Boden gespalten und umgekehrt, wenn die Zyklone nach Nordosten gesteuert wird, vereinigen sich die beiden Tiefdruckgebiete wieder zu einer Zyklone und die Spaltung findet ihr Ende.

Der Darstellung können wir aber noch ein Weiteres entnehmen. Die Störungen 1 und 4 haben allgemein einen wesentlich südlicheren Bahnverlauf als die Störungen 2 und 3. Diesem südlicheren Verlauf der Störungsbahn 1 und 4 entspricht eine wesentlich längere Spaltungsdauer. Die Bodenstörungen 1 und 4 bleiben in 80° Breite zirka 11 Tage gespalten, während die Tiefdruckgebiete 2 und 3 nur zirka 2 bis 2,5 Tage Spaltungsdauer aufzeigen. In 70° Breite sind die Störungen 1 und 4 zirka 7 Tage gespalten, während die Störungen 2 und 3, wie wir bereits wissen, keine Spaltung zeigen.

Demnach hängt die *Spaltungsdauer* von der Art der weiteren Fortbewegung der Bodenstörung nach dem Anfangstage (Steuerung) ab und davon wie sie am Anfangstag in bezug auf ihre Länge zur jeweiligen quasistationären Höhendruckverteilung liegt. Denn nach letzterer Beziehung richtet sich ihre weitere Bewegung. Je länger sie von diesem

Anfangstage an nach Südosten gesteuert wird, desto länger ist die Dauer der Spaltung und desto intensiver ist die Spaltung, d. h. desto flächenmäßig größer und kerntiefer wird das bei der Spaltung auftretende nördliche zweite Bodentief. Wird sie dagegen vom Anfangstage an nach Nordost gesteuert, so tritt keine Spaltung auf und die Störung muß erst ihre nördlichste Lage überschreiten und dann einer SE-Steuerung unterworfen werden, um sich zu teilen. Wann diese Spaltung nun erfolgt und in welcher Breite sich der Kern der Störung befinden muß, damit im Norden in 80° bzw. 70° Breite das Spaltungstief entsteht, hängt anscheinend von der Breitenlage des Tiefdruckkernes der Hauptstörung am Anfangstag ab, denn alle vier Bodenstörungen befinden sich am Anfangstag ($t = 0$) in derselben Breite (47,8°). Alle Störungen spalten bei südöstlicher Bewegung, wenn ihr Kern etwa zwei Breitengrade südöstlich gezogen ist und ungefähr die Breite 46° überschreitet, d. h. zu diesem Zeitpunkt treten in 80° Breite die ersten Anzeichen für das Bestehen eines zweiten Tiefs auf. Soll das nördliche Spaltungstief sich so weit ausdehnen, daß es auch die Breite 70° erreicht, dann muß der Kern der Hauptstörung noch ungefähr weitere fünf Breitengrade südostwärts gesteuert werden, also zirka 7° südöstlich der Breite des Anfangstages liegen. Diese Ansicht soll eine theoretische kurze Ausführung noch festigen.

Die relative Bahngleichung lautete:

$$\cos 2\,\varphi_m = V \cos (2\,\lambda_m - \sigma\,t) = \cos 2\,\varphi_0 + V \cos 2\,\lambda_0, \qquad (\mathrm{IX}_{13})$$

worin λ_m und φ_m die veränderliche Länge bzw. Breite des Kernes der Bodenstörung, λ_0 und φ_0 die für jede Störung konstante Länge bzw. Breite am Anfangstag ($t = 0$) und $V = \frac{4\,\gamma}{2\,\beta - \sigma} \cdot C$ war.

Die Bedingung für das Auftreten einer Spaltung (XI_2) lautete:

$$-V \cos (2\,\lambda - \sigma\,t) + V \cos (2\,\lambda - 2\,\beta\,t) - \cos 2\,\varphi \geqq 1.$$

Setzt man für $2\,\lambda = 2\,\lambda_0 + 2\,\beta\,t$ ein, so wird

$$-V \cos (2\,\lambda - \sigma\,t) + V \cos 2\,\lambda_0 - \cos 2\,\varphi \geqq 1. \qquad (\mathrm{XI}_9)$$

Kombiniert man diese Gleichung mit der obigen relativen Bahngleichung, so erhält man die Beziehung

$$-\cos 2\,\varphi_0 + \cos 2\,\varphi_m - \cos 2\,\varphi \geqq 1. \qquad (\mathrm{XI}_{10})$$

Daraus läßt sich bei Kenntnis von φ_0 (für jede Störung konstant, siehe Tabelle 6) diejenige Breite φ_m der relativen Bahn des Kernes der Bodenstörungen berechnen, bei der in 80° bzw. 70° Breite ein nördliches Spaltungstief auftritt. Es ergibt sich

$\varphi =$	80°	70°	60°
$\varphi_m =$	46,0°	41,1°	33,1°

für $\varphi_0 = 47{,}8°$. $\qquad (\mathrm{XI}_{11})$

Diese Werte bestätigen die vorstehenden Ausführungen und sie lassen sich auch der Darstellung der Abbildung 10 entnehmen. Alle Beginne A und Enden E von Spaltungen in 80° Breite liegen auf einer Breite von

46°, alle Beginne A und Enden E von Spaltungen in 70° Breite liegen in einer Breite von 41,1°, während die Breite von 33,1° von keiner Bahn der Bodenstörungen erreicht wird und daher sich auch keine Spaltung, wie Tabelle 8 zeigte, bis 60° Breite südwärts ausdehnt.

Zusammenfassend können wir aussagen:

1. Bodenstörungen zeigen Spaltungen bei SE-Steuerung und Spaltungsenden bei NE-Steuerung.

2. Stärkste Intensität der Spaltung fällt mit der südlichsten Lage der Störung zusammen; dabei hat das nördliche Spaltungstief seine südlichste Erstreckung und größte Kerntiefe.

3. Die Dauer der Spaltung hängt von der Richtung der Steuerung, die am Anfangstag einsetzt, ab, d. h. von der Phasenlage der Bodenstörung zur Höhendruckverteilung am Anfangstag ($t = 0$).

4. Der Spaltungsbeginn bzw. das Spaltungsende, also die Spaltungszeiten, sind gebunden an die geographische Breite des Anfangstages und die Art der Steuerung von diesem Tage ($t = 0$) an.

c) Spezielle Untersuchungen über Spaltung von Drucksteiggebieten.

H. Hoinkes hat in einer Arbeit [*17*] Drucksteiggebiete bei ihrer Umkreisung der Nordhalbkugel im Monat März 1931 untersucht. Er hat gezeigt, daß dabei regelmäßig Teilungen der Steiggebiete erfolgen, von denen der eine Teil nach SE, der andere nach E oder NE zieht, und macht dabei die Feststellung, daß der SE-ziehende Teil vermutlich stratosphärischer hoher Natur ist. Diese Feststellung soll später noch einmal genauer behandelt werden. Jedenfalls hat H. Hoinkes mit dieser Untersuchung erstmalig nachgewiesen, daß in der Atmosphäre solche Teilungen bzw. Spaltungen vorkommen und daß sie keine seltene Erscheinung sind, sondern die Verfolgung eines einzigen Steiggebietes auf einer Erdumkreisung mehrere solcher Spaltungen vollführt (siehe Abb. 21).

In einer an diese Untersuchung anknüpfenden Arbeit [*18*] hat H. Hoinkes dann den Vorgang der Teilung bzw. Kreuzung von Drucksteiggebieten näher behandelt und seine obigen Feststellungen durch die Hinzunahme von Höhenwetterkarten aerologisch besser fundiert. Seine einleitenden Feststellungen, daß das Auffinden solcher Teilungen nicht schwierig ist und daß die Teilungen zu den immer wiederkehrenden Ereignissen gehören, scheint hier besonders erwähnenswert, da diese Tatsache gemäß den vorangegangenen theoretischen Ausführungen über die Spaltung durchaus begreiflich ist.

Es sei hier eine Abbildung der Arbeit von H. Hoinkes wiedergegeben, die in ganz charakteristischer Weise einige Tatsachen und Erscheinungen wiedergibt, die in dem vorangehenden Kapitel auf theoretischem Wege gefunden und erörtert wurden.

Die Abb. 22 zeigt die Verfolgung eines Steiggebietes vom 12. bis zum 14. März 1939 in Bewegung nach NE. Dabei ist bemerkenswert,

daß das Steiggebiet seine Intensität verstärkt bis zur nördlichsten Lage am 14. März. Von da an tritt bei weiterer Verfolgung bis zum 22. März eine Teilung auf, in dem ein Teil nach E bis NE, der andere Teil nach SE zieht. Der E-ziehende nördliche Teil verstärkt zunächst seine Intensität

Abb. 21. Kerne der Steiggebiete und Kältewellen (Nullisallothermen) März 1931. Datum des zweiten Tages (nach H. HOINKES [17]).

und schwächt sich dann allmählich ab. Der SE-ziehende Teil schwächt sich zusehends mit der SE-Bewegung ab und beginnt erst nach dem 20. März wieder sich mäßig zu verstärken, da von da an eine Änderung seiner Bewegungsrichtung von SE über E nach NE erfolgt ist. Alle diese Erscheinungen decken sich in vollendeter Weise mit den gefundenen theoretischen Ergebnissen beim Vorgang der Bewegungsbeeinflussung durch eine Steuerung, verbunden mit einem Teilungsvorgang.

Abb. 22. Teilung vom 15. März 1939. Zugbahn und Intensität der Steiggebiete des Luftdruckes (ein Kreis bedeutet den Bereich von 10 mb) und Kaltfronten. Datum des zweiten Tages (nach H. HOINKES [*18*]).

Dieselben Erscheinungen zeigt in nicht minder schöner Weise eine weitere Abbildung, die ebenfalls der Arbeit von H. HOINKES entnommen ist und den Vorgang einer Teilung bzw. Kreuzung vom 3. April 1938 wiedergibt.

Abb. 23. Kreuzung vom 3. April 1938. Zugbahn und Intensität der Steiggebiete des Luftdruckes und Kaltfronten (nach H. HOINKES [*18*]).

Auch hier wieder Intensitätsverstärkung bei NE-Bewegung, Intensitätsabschwächung im absteigenden Aste der Bewegung nach SE. Während dieses Bewegungsstadiums erfolgt die Teilung und wieder zieht ein nördlicher Teil nach E zuerst unter Verstärkung der Intensität und erst später unter Abschwächung. Die zu diesem Falle gehörigen Höhendruckkarten (absolute Topographie) mit den Zugbahnen der zwei Teilsteiggebiete nach der Spaltung zeigt in klarer Weise ein Bild, das der Abb. 10 der vorliegenden Arbeit völlig entspricht. Es zeigt sich, daß die Spaltung nur bei SE-Bewegung und bei SE-Steuerung erfolgt.

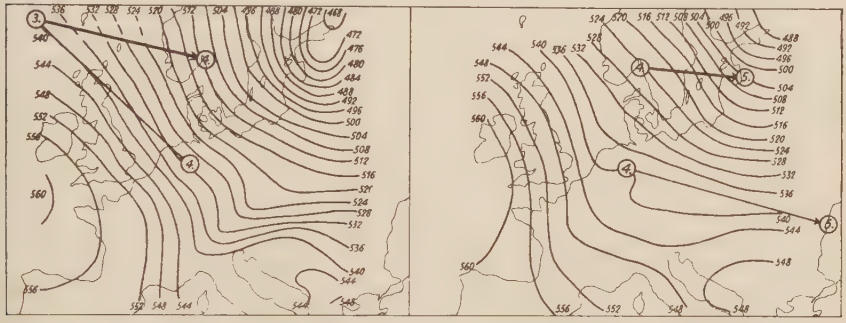


Abb. 24. Absolute Topographie am 4. und 5. April 1938 und Zugbahnen der Steiggebiete vom 3. zum 4. und 4. zum 5. April (nach H. HOINKES [*18*]).

So schließen sich die aus den Beobachtungen und der Synoptik gewonnenen Ergebnisse von H. HOINKES und die theoretischen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zu einem einheitlichen, recht schön sich ergänzenden Bild zusammen. Man kann den Vorgang der Teilung, wie schon von H. HOINKES mehrfach betont wurde, durchaus oft in der Praxis vorfinden und er wird bei Vorhandensein einer quasistationären Höhendrucksituation, die eine Steuerung der Bodenstörungen bewirkt, regelmäßig und oft gemäß den theoretischen Bedingungen auftreten.

Im folgenden soll nun noch eine Untersuchung der Druckänderungen in den zwei Hauptstadien der Bewegungen der Bodentiefdruckgebiete vorgenommen werden: einerseits während der absteigenden Bewegung (SE-Steuerung), anderseits während der aufsteigenden Bewegung (NE-Steuerung).

XII. Die Bodendruckänderung beim Spaltungsvorgang und ihre Natur.

a) Theoretische und rechnerische Abschätzung der Natur der Bodendruckänderungen und ihrer prozentualen Anteile (stratosphärisch und troposphärisch) in zwei unterschiedlichen Steuerungsstadien.

Um den Fragen der bei den Spaltungsvorgängen und bei gesteuerter Bewegung der Bodenstörungen auftretenden Bodendruckänderungen

nähertreten zu können, ist es notwendig, vorerst einige einleitende und theoretische Bemerkungen vorwegzunehmen.

Geht man rein von der Gültigkeit der statischen Grundgleichung aus, so läßt sich eine Änderung des Bodendruckes durch die Änderung des Druckes über der Höhe H (stratosphärischer Anteil) und durch eine Änderung unter dieser Höhe H (troposphärischer Anteil) erklären. Die statische Grundgleichung besagt, daß sich die obere Druckänderung gemäß dem Verhältnis der Drucke oben und unten bis zum Erdboden durchsetzt und der untere Druckanteil durch die Veränderung der Mitteltemperatur zwischen dem Boden und der Höhe H verursacht wird.

Rein nach diesen allgemeinen Gesetzen läßt sich nachstehende Tabelle 10 aufstellen, die die verschiedenen Variationen von Änderungen des Höhendruckes, Änderungen der Mitteltemperatur bis zur Höhe H und die Größe des Einflusses der Anteile wiedergibt. Man erhält damit 12 Arten von Bodendruckänderungen verschiedener Art.

Weiter ist eine Überlegung von Wichtigkeit, die bei Annahme einer quasistationären Höhendruckverteilung streng beachtet werden muß. Die Zyklone bewegt sich in mehr oder weniger rascher Bewegung unter einer fast stationären Höhendruckverteilung von Westen nach Osten. Demnach kommen für die Änderungen des Bodendruckes nur jene relativen Änderungen des Höhendruckes in Frage, die senkrecht über der Bodenstörung durch die Differenz der Höhendrucke zweier Termine in der Höhe H entstehen.

Zur Abschätzung der Größe der Druckänderungen setzen wir

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p}{p_H} \cdot \frac{\Delta p_H}{\Delta t} - \frac{g H p}{R T^2} \cdot \frac{\Delta T_m}{\Delta t} \quad \text{(statische Grundgleichung).} \qquad (\text{XII}_1)$$

Den Effekt des Mitteltemperaturgliedes

$$- \frac{g H p}{R T^2} \cdot \frac{\Delta T_m}{\Delta t}$$

fassen wir als eine Druckänderung Δp_T auf, so daß

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p}{p_H} \cdot \frac{\Delta p_H}{\Delta t} + \frac{\Delta p_T}{\Delta t} \qquad (\text{XII}_2)$$

ist. Ganz allgemein gilt für den Bodendruck

$$p = A + a \cos \frac{2\pi}{L} \quad (\lambda - c\,t), \qquad (\text{XII}_3)$$

worin $c = \frac{L}{T}$ und $a = a\,(t)$ ist.

Damit wird

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{2\pi}{L} a\,(c - u) \sin \frac{2\pi}{L} (\lambda - c\,t) + \\ + \frac{\partial a}{\partial t} \cos \frac{2\pi}{L} (\lambda - c\,t). \qquad (\text{XII}_4)$$

Tabelle 10.

Druck in der Höhe H (p_H)	Temperatur der Troposphäre (T_m)	Einfluß der Anteile	Bodendruck (p)	p_m	T_m	Einfluß der Anteile	p	
steigt	steigt	Anteile von p_H und T_m gleich	keine Änderung, Kompensation	+	+	$p_H = T_m$	0	1
steigt	fällt		starker Anstieg	+	—		++	2
steigt	steigt	Anteil von p_H überwiegt	mäßiger Anstieg	+	+	$p_H > T_m$	+	3
steigt	steigt	Anteil von T_m überwiegt	mäßiger Druckfall	+	+	$p_H < T_m$	—	4
fällt	fällt	Anteil von p_H und T_m gleich	keine Änderung Kompensation	—	—	$p_H = T_m$	0	5
fällt	steigt		starker Druckfall	—	+		— —	6
fällt	fällt	Anteil von p_H überwiegt	mäßiger Druckfall	—	—	$p_H > T_m$	—	7
fällt	fällt	Anteil von T_m überwiegt	mäßiger Anstieg	—	—	$p_H < T_m$	+	8
keine Änderung	fällt		Anstieg	0	—		+	9
keine Änderung	steigt		Fall	0	—		—	10
steigt	keine Änderung		starker Anstieg	+	0		++	11
fällt	keine Änderung		starker Druckfall	—	0		— —	12

Es wird

1. Für einen Beobachter an einem festen Punkt ($u = 0$)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}.$$

2. Für einen Beobachter, der mit der Bodenstörung mitgeht ($u = c$)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} \cos \frac{2\pi}{L} (\lambda - c\,t)$$

oder mit endlichen Druckgrößen und Zeitintervallen

$$\frac{p_2 - p_1}{\Delta t} = \frac{a_2 - a_1}{\Delta t} \cos \frac{2\pi}{L} (\lambda - c\,t) = \frac{p^{\lambda_2} - p^{\lambda_1}}{\Delta t}, \qquad (\text{XII}_5)$$

d. h. die zeitliche Druckänderung am Boden für einen mit der Zyklone sich mitbewegenden Beobachter ist gleich der Differenz der Drucke an der Stelle λ_2 und λ_1 dividiert durch das Zeitintervall Δt.

Für den Höhendruck p_H gilt ganz allgemein

$$p_H = B + m \cos \frac{2\pi}{L_H} (\lambda - c_H \cdot t), \qquad (\text{XII}_6)$$

worin $c_H = \frac{L_H}{T}$ und $m = m(t)$ ist, und

$$\frac{dp_H}{dt} = \frac{\partial p_H}{\partial t} + u \frac{\partial p_H}{\partial \lambda}. \qquad (\text{XII}_7)$$

Die obere Druckwelle bewegt sich aber für einen Beobachter, der mit der Bodenstörung mitgeht, wie schon eingangs erwähnt, nicht und deshalb ist $c_H = 0$ zu setzen.

Damit ist also p_H zeitunabhängig und

$$\frac{dp_H}{dt} = m \frac{2\pi}{L_H} \cdot u \sin \frac{2\pi}{L_H} \cdot \lambda \qquad (\text{XII}_8)$$

oder mit endlichen Höhendruckgrößen und endlichen Zeitintervallen

$$\frac{p_H{}^2 - p_H{}^1}{\Delta t} = \frac{p_H{}^{\lambda_2} - p_H{}^{\lambda_1}}{\Delta \lambda} \cdot u = \frac{p_H{}^{\lambda_2} - p_H{}^{\lambda_1}}{\Delta \lambda} \cdot \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} = \frac{p_H{}^{\lambda_2} - p_H{}^{\lambda_1}}{\Delta t}, \qquad (\text{XII}_9)$$

d. h. die zeitliche Änderung des Höhendruckes für einen Beobachter, der mit der Bodenstörung sich mitbewegt, ist gleich der Differenz der Höhendrucke an den Stellen λ_1 und λ_2, die genau über den Stellen λ_1 und λ_2 der Bodenstörung liegen und ihnen identisch sind, dividiert durch das gleiche Zeitintervall Δt.

Die Mitteltemperatur T_m der Luftsäule von der Höhe H setzt sich aus zwei Anteilen T_1 und T_2 zusammen.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T_1}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial T_2}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \lambda}. \qquad (\text{XII}_{10})$$

1. T_1 ist derjenige Anteil von T_m, der sich ergibt aus der zeitveränderlichen Höhendruckverteilung und der *mittleren* Bodendruckverteilung. Da wir aber alles vom Gesichtspunkte eines Beobachters, der mit der

hohen Störung mitgeht, betrachten und für diese die Höhendruckverteilung stationär ist, ist T_1 zeitunabhängig $\left(\frac{\partial T_1}{\partial t} = 0\right)$.

2. T_2 ist bedingt durch die Temperaturverteilung in der Troposphäre, die mit dem wandernden Tiefdruckgebiet am Boden (schnell wandernde, kurzperiodische Welle) eng verknüpft ist.

Danach wird aus (XII_{10})

$$\frac{dT_m}{dt} = u \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial T_2}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \lambda}. \qquad (XII_{11})$$

Daraus wird analog den obigen Ausführungen bei p und p_H

$$\frac{dT_m}{dt} = \frac{T_1^{\lambda_2} - T_1^{\lambda_1}}{\Delta t} + \frac{\Delta T_2}{\Delta t} = \frac{p_{T_1}^{\lambda_2} - p_{T_1}^{\lambda_1}}{\Delta t} + \frac{\Delta p_{T_2}}{\Delta t}. \qquad (XII_{12})$$

D. h. die zeitliche Änderung der Mitteltemperatur der Luftsäule von der Höhe H setzt sich aus der Differenz des Anteiles T_1 an den Stellen λ_1 und λ_2, dividiert durch das Zeitintervall Δt und einem weiteren Anteil $\frac{\Delta T_2}{\Delta t}$ zusammen, welches die Temperaturänderung darstellt, die im Bereiche der Zyklone durch ihre eigene Zirkulation hervorgerufen wird. Diese Temperaturänderungen können wir auch als Druckeffekte auffassen.

Fassen wir abschließend die Ergebnisse der Gleichungen XII_5, XII_9 und XII_{12} zusammen und setzen wir sie in Gleichung XII_2 ein, so ergibt sich

$$\frac{p^{\lambda_2} - p^{\lambda_1}}{\Delta t} = \underbrace{\frac{p}{p_H} \cdot \frac{p_H^{\lambda_2} - p_H^{\lambda_1}}{\Delta t}}_{\text{Strat}} + \underbrace{\frac{p_{T_1}^{\lambda_2} - p_{T_1}^{\lambda_1}}{\Delta t} + \frac{\Delta p_{T_2}}{\Delta t}}_{\text{Trop}}. \qquad (XII_{13})$$

Trop: Trop 1, Trop 2

Es zeigt sich demnach, daß sich die Änderung des Bodendruckes p von einem Orte λ_1 bis zu einem anderen um die Zeit Δt verschiedene Orte λ_2 in einen stratosphärisch-oberen Anteil Strat und einem troposphärisch-unteren Anteil Trop zerlegen läßt, wovon letzterer wieder in zwei Anteile $Trop_1$ und $Trop_2$ zerfällt, deren erster den Druckeffekt der allgemeinen mittleren troposphärischen Temperaturverteilung darstellt, so wie sie durch die *mittlere* Bodendruckverteilung und die langsam wandernde Druckwelle (quasistationär) in der Höhe entsteht, und deren zweiter Anteil den Druckeffekt der Temperaturänderungen durch die eigene Zirkulation der troposphärischen Zyklone beinhaltet.

Diese Gleichung XII_{13} wollen wir nun an der Hand der rechnerischen Ergebnisse einer genauen Prüfung unterziehen.

Wir wählen dazu zwei Situationen der Bodenstörung 1, und zwar einmal in absteigender Bewegung nach SE am 1. und 2. Tag und anderseits in aufsteigender Bewegung nach NE am 7. und 8. Tag. Damit haben wir die zwei hauptsächlichsten und wichtigsten Zustände der

Steuerung erfaßt und wollen nun die Anteile der Bodendruckänderungen der Zyklone gemäß Gleichung XII_{13}, in diesen Stadien der Bewegung der Bodenstörung 1 bestimmen.

Legt man durch das Zentrum der Zyklone eine senkrechte Achse und parallel im Abstande von 10° vor und nach ihr zwei Senkrechte, dann hat man drei Schnitte durch den Bereich der Zyklone, für die man die Druckwerte in 80°, 70°, 60°, 50°, 40° und 30° Breite bestimmen kann. Man erhält damit für jeden Tag 18 Bodendruckwerte gleichmäßig über den gesamten Bereich der Störung verteilt. Diese Werte wurden für den 1. und 2. Tag, sowie für den 7. und 8. Tag mit peinlichster Genauigkeit berechnet und die Druckänderungen am Boden vom 1. auf den 2. Tag, sowie vom 7. auf den 8. Tag gebildet. Damit ist das erste Glied der Gleichung XII_{13}, nämlich die 24stündige Bodendruckänderung $\frac{p^{\lambda_2} - p^{\lambda_1}}{\Delta t}$ exakt bestimmt.

In der gleichen Weise wurde die Höhendruckänderung berechnet, und zwar, gemäß den Ausführungen S. 218, aus denjenigen Höhendruckwerten, die genau senkrecht an dem entsprechenden Tag über den eben berechneten Bodendruckwerten lagen. Damit ist auch das zweite Glied der Gleichung XII_{13}, $\frac{p_H^{\lambda_2} - p_H^{\lambda_1}}{\Delta t}$, exakt ermittelt. Es wurde nun noch mit dem Faktor $\frac{p}{p_H}$, gemäß S. 160, multipliziert.

Weiter wurde aus diesen Höhendruckwerten und einer mittleren Bodendruckverteilung die Mitteltemperaturen gerechnet und deren Änderung vom 1. zum 2. Tag und vom 7. zum 8. Tag bestimmt.

Um diese Temperaturänderung in eine Druckänderung umzuwandeln, muß man sie mit einem Faktor $f = -3$ multiplizieren, der sich unter Vorgabe eines mittleren T_m zwischen Boden und 7 km Höhe sowie einem mittleren p_m aus der Beziehung

$$\Delta p = -\frac{g H p_m}{R T_m} \cdot \Delta T_m = -f \cdot \Delta T_m$$

berechnen läßt.

Damit ist auch das dritte Glied der Gleichung XII_{13} mit mehr oder weniger großer Genauigkeit (wegen des Faktors f) bestimmt und es ist möglich, das letzte Glied dieser Gleichung $\frac{\Delta p_{T_2}}{\Delta t}$, welches den Druckeffekt derjenigen Temperaturänderungen darstellt, die durch die troposphärische Zirkulation der Zyklone hervorgerufen sind, aus der Gleichung XII_{13} zu ermitteln.

Es ergaben sich damit folgende Zahlenwerte, die der zahlenmäßige Ausdruck für die Gleichung XII_{13} sind, aufgegliedert nach Bodendruckänderung B, stratosphärisch-oberer Anteil Strat, troposphärisch-unterer Anteil $Trop_1$ (allgemeine mittlere Temperaturverhältnisse) und troposphärisch-unterer Anteil $Trop_2$ (Temperaturänderung durch Zirkulation der Zyklone).

Tabelle 11.

φ	Boden	Strat	$Trop_1$	$Trop_2$
	1. bis 2. Tag			
80	— 0,32 — 1,47 — 0,31	— 5,34 — 5,69 — 5,31	+ 4,89 + 5,26 + 4,92	+ 0,13 — 1,04 + 0,08
70	+ 1,70 + 2,74 + 2,22	— 5,24 — 5,58 — 5,22	+ 5,07 + 5,36 + 5,00	+ 1,87 + 2,96 + 2,44
60	+ 1,31 + 1,75 + 1,58	— 5,10 — 5,43 — 5,07	+ 5,21 + 5,51 + 5,16	+ 1,20 + 1,67 + 1,49
50	+ 1,11 + 1,40 + 1,27	— 4,94 — 5,26 — 4,92	+ 5,34 + 5,71 + 5,35	+ 0,71 + 0,95 + 0,84
40	+ 0,91 + 1,04 + 1,10	— 4,79 — 5,10 — 4,77	+ 5,60 + 5,94 + 5,54	+ 0,10 + 0,20 + 0,36
30	+ 0,74 — 0,14 + 0,93	— 4,66 — 4,95 — 4,63	+ 5,78 + 6,14 + 5,75	— 0,38 — 1,33 — 0,19
	7. bis 8. Tag			
80	0,01 0 — 0,17	+ 5,34 + 5,69 + 5,31	— 4,90 — 5,26 — 4,97	— 0,45 — 0,43 — 0,17
70	+ 0,02 + 0,18 + 0,31	+ 5,24 + 5,58 + 5,22	— 4,99 — 5,36 — 5,05	— 0,27 — 0,06 + 0,14
60	— 0,05 — 1,16 — 1,23	+ 5,10 + 5,43 + 5,07	— 5,16 — 5,51 — 5,21	+ 0,01 — 1,08 — 1,09
50	— 0,09 — 0,62 — 0,98	+ 4,94 + 5,26 + 4,92	— 5,35 — 5,73 — 5,40	+ 0,32 — 0,15 — 0,50
40	— 0,08 — 0,49 — 0,84	+ 4,79 + 5,10 + 4,77	— 5,55 — 5,92 — 5,60	+ 0,68 + 0,33 — 0,01
30	— 0,05 — 0,38 — 0,73	+ 4,66 + 4,95 + 4,63	— 5,74 — 6,14 — 5,81	+ 1,03 + 0,81 + 0,45

Bevor wir mit diesen Zahlenwerten bei Tabelle 11 eine prozentuale Abschätzung der Bodendruckänderungen vornehmen, sei darauf hingewiesen, daß bei der Berechnung dieser Werte doch teilweise recht überschlagsmäßige mittlere Annahmen verwendet wurden, die eine zu große Genauigkeit der Resultate nicht zulassen. Jedoch sollen diese Zahlen uns ja auch nur ein überschlagsmäßiges Bild geben, aus welchen Anteilen sich die Druckänderung am Boden zusammensetzt und dies tun diese Berechnungen doch in erstaunlicher Weise. Die Berechnung der Werte in Tabelle 11 wurde soweit möglich bis in die dritte Dezimale genau durchgeführt.

Nachfolgende Abb. 25 zeigt uns schematisch den Ablauf einer Steuerung eines Bodentiefs bei stationärer Höhendruckverteilung. Dieser troposphärische Zustand, so wie ihn die Zeichnung wiedergibt, erneuert sich ständig von Störung zu Störung und stellt somit einen *mittleren* Bodendruckzustand dar.

In Worten ist dieser Zustand auf der Abb. 25 unter der Zeichnung festgehalten, darunter in

Worten der stationäre Höhendruckzustand. Als letzte Spalte darunter ist die aus diesen Druckverteilungen oben und unten nach der Statik resultierende mittlere Temperaturverteilung der Troposphäre mit Worten verzeichnet.

Trägt man sich nun die Isobarenformen der Bodenstörung 1 am 2. und 8. Tag lagegerecht in diese mittlere Temperaturverteilung der Troposphäre ein, so wie es in Abb. 25 unten geschehen ist, so läßt sich mittels

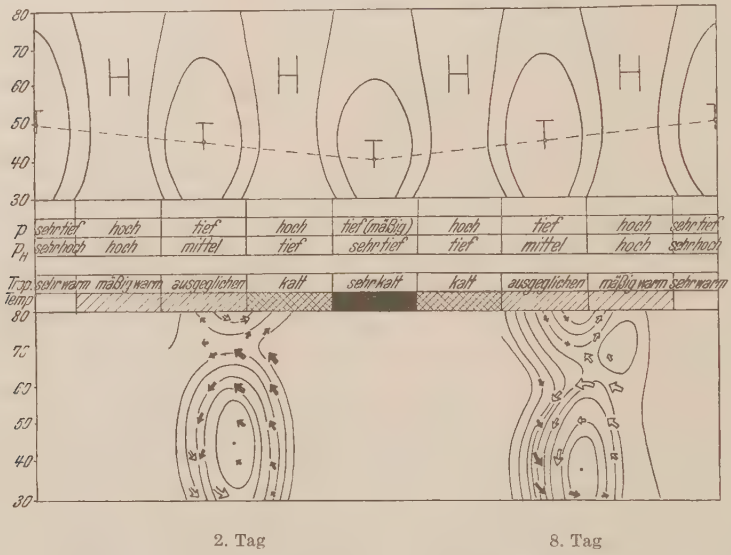


Abb. 25. Schematische Darstellung zur Ermittlung der durch die Zirkulation der Zyklone hervorgerufenen Erwärmung bzw. Abkühlung in der Troposphäre in unterschiedlichen Steuerungsstadien (2. und 8. Tag). (Oben: Mittlerer Druckzustand am Boden, der sich immer wieder einstellt. Mitte: Angabe über Bodendruck p und Höhendruck p_H. Unten: Daraus resultierende allgemeine Verteilung der Mitteltemperatur in der Troposphäre und darunter schematische Darstellung der Zirkulation der Zyklone am 2. und 8. Tag. Schwarze Pfeile = Abkühlung, weiße Pfeile = Erwärmung.)

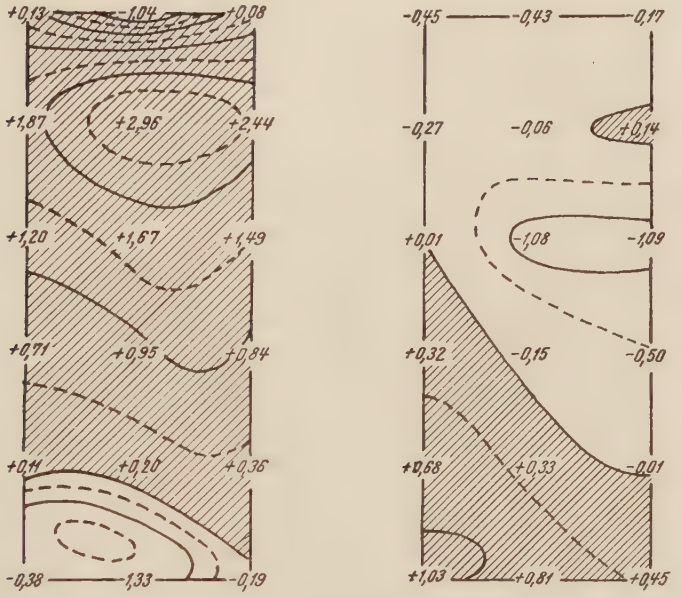
Pfeilen die troposphärische Zirkulation, so wie sie durch die Zyklone erzeugt wird, ermitteln. Weiße Pfeile bedeuten Erwärmung, schwarze Pfeile Abkühlung.

Diese letzte Darstellung müßte sich gemäß Definition mit dem letzten Glied $Trop_2$ der Tabelle 12 identisch erweisen.

b) Diskussion der Ergebnisse von a).

Trägt man sich die Werte $Trop_2$ der Tabelle 12 graphisch auf und zieht Linien gleicher Druckänderungen, so zeigt die Abb. 26 für den 1. bis 2. sowie für den 7. bis 8. Tag eine völlige Übereinstimmung mit der unteren Zeichnung der Abb. 25, wenn man in der Troposphäre den Druckfall mit Erwärmung und den Druckanstieg mit Abkühlung identifiziert.

Man erkennt aber weiter aus diesen Abbildungen, daß die Zyklone sich vom 2. Tag an auffüllen muß, was ja bei SE-Steuerung, wie wir gesehen haben, der Fall sein muß, denn ein Druckanstieg und Abkühlung an der Vorderseite und ein Druckfall mit Erwärmung an der Rückseite führt zum Auffüllen der Zyklone. Trägt man sich die Bodendruckänderungen der Tabelle 11 graphisch auf, so zeigen die Abb. 27, daß vom 1. auf den 2. Tag unbedingt eine Spaltung erfolgen muß, denn im Norden und



1.—2. Tag 7.—8. Tag

Abb. 26. Flächenhafte Darstellung des Anteiles $Trop_2$ der Bodendruckänderung, der durch die Zirkulation der Zyklone in der Troposphäre hervorgerufen wird (dunkle Flächen = Druckanstieg, weiße Flächen = Druckfall).

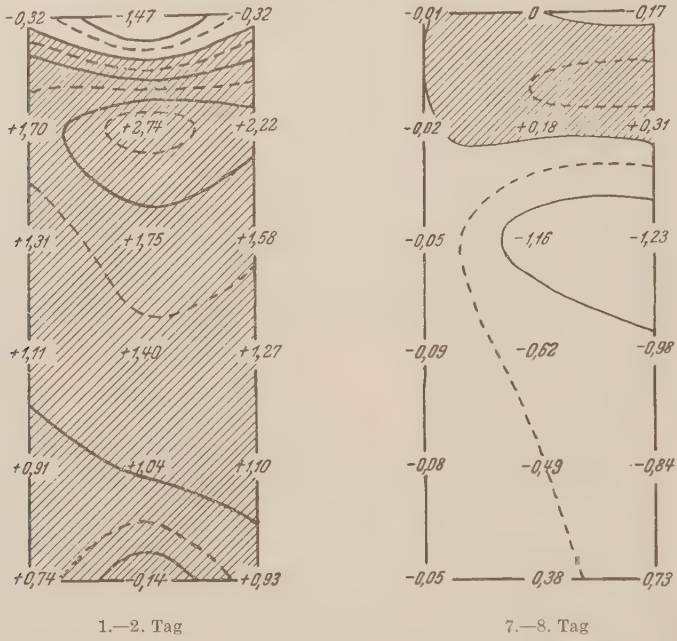
Süden fällt der Druck und in der Mitte steigt er. Vom 7. auf den 8. Tag aber muß sich die Spaltung auflösen, denn im Mittelteil, wo der Hochdruckrücken der Spaltung ist, fällt der Druck und so löst sich die Hochdruckbrücke auf, im Norden steigt der Druck und füllt das nördliche Spaltungstief auf. Die Folge ist eine Nordwärtsverlagerung der Zyklone mit einer zentralen Vertiefung und einer Auflösung der Spaltung.

So schließt sich Steuerung, Spaltung und Spaltungsauflösung sowie Bodendruckänderung und troposphärische Zirkulation der Zyklone und deren Anteil an der Druckänderung am Boden zu einem einheitlich ineinander greifenden Ganzen zusammen und es zeigt sich, daß die Steuerung durch die stationäre Höhendruckverteilung die Zugrichtung, Spaltung und Druckänderung der troposphärischen Störungen maßgeblich beeinflußt oder verursacht.

c) Die Natur der Bodendruckänderung und der Vergleich mit den bisherigen praktischen Ergebnissen.

Abschließend soll noch die wichtige Frage des stratosphärischen bzw. troposphärischen Anteils der Bodendruckänderung untersucht werden.

Da über der Lage der Störung 1 am 1. bzw. 2. Tag der Druck in der Höhe gleichmäßig fällt und umgekehrt der Druck in der Höhe am 7. bzw. 8. Tag gleichmäßig steigt, läßt sich mit Hilfe der Kenntnis,



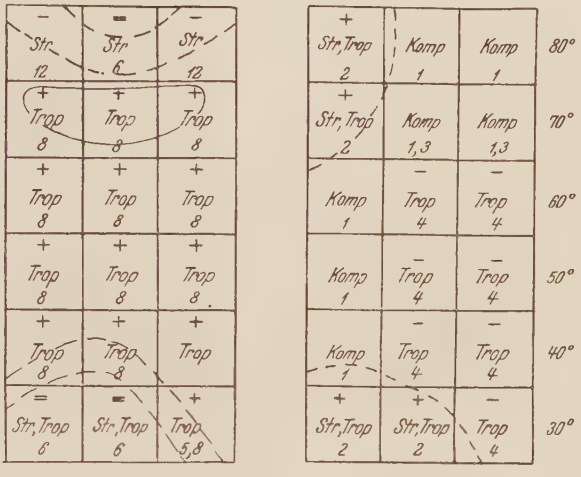
1.—2. Tag 7.—8. Tag

Abb. 27. Flächenhafte Darstellung der Bodendruckänderung (dunkle Flächen = Druckanstieg, weiße Flächen = Druckfall).

in welchen Teilen der Zyklone in der Troposphäre Erwärmung bzw. Abkühlung vorhanden ist, nach der Tabelle 10 leicht abschätzen, welche Bodendruckänderung in den einzelnen Teilen des Zyklonenbereiches auftreten muß und ob diese Änderung stratosphärischer oder troposphärischer Natur ist. Nachfolgende Abbildung 28 zeigt den Zyklonenbereich in je 18 Felder zerlegt und in jedes Feld ist nach obiger Methode die Art der Bodendruckänderung (+ Anstieg, — Fall, *Komp* Kompensation), die Zuordnung dieser Änderung (*Str* stratosphärisch, *Trop* troposphärisch) und mit einer Zahl diejenige Regel der Tabelle 10, die auf das entsprechende Feld angewandt wurde, eingetragen.

Man erkennt, daß sich eine Bodendruckänderung ergibt, die in fast allen Punkten den errechneten Änderungen (Abb. 27) entspricht.

Das Schema der Änderung vom 1. auf den 2. Tag zeigt, daß die Bodendruckänderung, welche das nördliche Spaltungstief verursacht, stratosphärischer Natur ist und daß die Änderungen der SE-ziehenden Hauptzyklone meist troposphärischer oder komplexer Natur sind. Der Spaltungshochdruckrücken ist ebenfalls troposphärischer Natur. Das Schema der Änderung vom 7. auf den 8. Tag zeigt, daß fast alle Änderungen am Boden, besonders diejenigen an der



1. 2. Tag 7. 8. Tag

Abb. 28. Schematische Darstellung der Bodendruckänderung, wie sie sich nach den Überlegungen der Tabelle 11 und der Abb. 27 ergibt. (In jedem Teilfeld des Zyklonenbereiches ist angegeben: oben: + = Anstieg, — = Fall; Mitte: Str = stratosphärisch bedingt, Trop = troposphärisch bedingt; unten: die Zahl gibt die Regel der Tabelle 11 wieder.

Vorderseite des Zyklonenbereiches troposphärische sind und bei den übrigen die stratosphärischen Druckänderungen lediglich kompensierend wirken.

Errechnet man sich aus den Zahlenwerten der Tabelle 11 wieviel jeder Druckänderungsanteil in Prozenten zu der zusammengesetzten Bodendruckänderung beisteuert, so ergibt sich folgendes mit der Abb. 28 korrespondierendes Bild.

Man erkennt aus dem Schema des 1. und 2. Tages, daß wieder das nördliche Spaltungstief in der Hauptsache stratosphärischer Natur, die SE-ziehende Zyklone komplexer oder troposphärischer Natur ist. Der Hochdruckrücken in 70° Breite ist rein troposphärisch. Er ist nur durch den Anteil $Trop_2$, der von der Eigenzirkulation der Zyklone herrührt, erzeugt. Man erkennt weiter, daß sich gegen die südlichen Breiten zu im Zyklonenbereich der Einfluß des Anteiles $Trop_1$, der aus der Verteilung der Mitteltemperatur in der Troposphäre resultiert, gegenüber dem Einfluß des Anteiles $Trop_2$ verstärkt.

Tabelle 12.

		1. bis 2. Tag			7. bis 8. Tag		
	Strat	100	29	100	—	—	—
80°	$Trop_1$	—	—	—	—	—	—
	$Trop_2$	—	71	—	100	100	100
	Strat	—	—	—	—	100	55
70°	$Trop_1$	—	—	—	—	—	—
	$Trop_2$	100	100	100	100	—	45
	Strat	—	—	—	—	—	—
60°	$Trop_1$	8	5	6	100	7	9
	$Trop_2$	92	95	94	—	93	89
	Strat	—	—	—	—	—	—
50°	$Trop_1$	36	32	34	100	76	49
	$Trop_2$	64	68	66	—	24	51
	Strat	—	—	—	—	—	—
40°	$Trop_1$	88	81	67	100	76	49
	$Trop_2$	12	19	33	—	24	51
	Strat	—	—	—	—	—	—
30°	$Trop_1$	100	100	100	100	100	99
	$Trop_2$	—	—	—	—	—	1

Das Schema des 7. bis 8. Tages zeigt, daß ausschließlich in allen Teilfeldern des Zyklonenbereiches nur troposphärische Druckänderungen auftreten. An der Vorderseite der sich vertiefenden Zyklone ist der Zirkulationsanteil $Trop_2$ vorherrschend, im Süden und an der Rückseite der Anteil $Trop_1$. Ebenfalls im Norden, wo sich das nördliche Spaltungstief auffüllt und im Bereich des abbauenden Hochdruckrückens der Spaltung ist der Anteil $Trop_2$ maßgeblich für die Bodendruckänderung.

H. Hoinkes macht in seiner Untersuchung folgende Aussage über die Natur der Druckänderungen im Falle einer Teilung der Bodenstörung. Er sagt aus, daß das nach der Teilung nach NE bis E abziehende Steiggebiet ein hohes Steiggebiet ist und damit stratosphärischer Natur ist. Die SE-abziehenden Steiggebiete aber sich aus nach SE vorauseilender troposphärischer Abkühlung, die den Druckfall in der Höhe überkompensiert, und dem aus NW nachfolgenden Druckanstieg in der Höhe zusammensetzt. Also ist dieser Teil komplexer oder troposphärischer Natur.

In bester Weise decken sich wiederum diese an Hand von praktischem Material gewonnenen Ergebnisse mit den rein aus der Theorie abgeleiteten Feststellungen über die Natur der Bodendruckänderung bei gesteuerter Bewegung einer troposphärischen Störung durch eine quasistationäre Druckverteilung in der Höhe.

XII. Zusammenfassung und praktische Folgerungen der theoretischen Untersuchung für die Synoptik.

In vorliegender Arbeit wurde der Versuch unternommen, aufbauend auf die früheren Untersuchungen über die primären und sekundären Druckschwankungen in der Atmosphäre, auf theoretischem Wege der Frage der Steuerung von Bodendruckstörungen durch eine obere vorgegebene Druckverteilung näher zu treten. Ausgehend von den allgemeinsten Annahmen und Grundgleichungen, wie 1. Hauptsatz der Wärmelehre, Gültigkeit der statischen Grundgleichung und den Bewegungsgleichungen ohne Berücksichtigung der Reibung wurde auf theoretischem Wege bei Vorgabe einer Druckwelle in der Höhe und einer mittleren Bodendruckverteilung zur Zeit $t = 0$ zuerst eine geschlossene Lösung für den Bodendruck für den Fall einer schneller als die Bodendruckverteilung von Westen nach Osten wandernden Druckwelle in der Höhe $H = 7$ km gefunden und für p eine rechnerische Auswertung über eine Reihe von Tagen vorgenommen. Es zeigte sich, daß in diesem Falle von einer Steuerung der Bodenstörungen nicht gesprochen werden konnte, daß sich wohl der Kern der Bodenstörung auf einer gewissen, nicht breitenparallelen Bahn bewegt, nicht aber das Gesamtgebiet des Bodentiefdruckgebietes einer solchen Verlagerung in meridionaler Richtung unterworfen war und daß diese Bahn der Störungen in keiner Beziehung zur oberen Druckverteilung stand. Daher wurde, den praktischen Erfahrungen der Synoptik folgend, eine Änderung der Grundannahme über die primäre Druckwelle in der Höhe vorgenommen und diese mit einer wesentlich herabgeminderten Fortpflanzung nach Osten und einer größeren Wellenlänge angenommen. Damit wurde also eine quasistationäre Höhendruckverteilung mit großräumigen Hoch- und Tiefdruckgebieten vorgegeben. Auch für diesen Fall wurde unter Annahme schnell laufender Bodendruckwellen eine theoretisch geschlossene Lösung für den Bodendruck p erzielt und rechnerisch für 20 Tage ausgewertet.

Es zeigte sich, daß jetzt die Bodendruckstörungen einer richtigen Steuerung im Sinne v. Fickers durch die obere Druckverteilung unterworfen sind, daß sie also eine gesteuerte Bewegung mit Nord- bzw. Südkomponente gemäß den Höhenisobaren vollführen und auf diesen gesteuerten Bahnen beträchtliche Intensitätsschwankungen aufweisen.

Die Steuerung erfolgt in dem Sinne, daß die Bodenstörungen eine Antizyklone in der Höhe im Sinne des Uhrzeigers, eine Zyklone in der Höhe entgegen dem Sinne des Uhrzeigers umkreisen, d. h. die Zyklone wird, wenn sie sich unter dem Höhenhoch hindurch in Richtung auf das Höhentief hin bewegt, nach SE gesteuert und erreicht ihre südlichste Lage, wenn sie genau unter dem Höhentief liegt. Von dort an wird sie bei weiterer Bewegung auf das nächste Höhenhoch hin nach NE gesteuert und erreicht ihre nördlichste Lage, wenn sie genau unter dem Höhenhoch liegt. Dabei verflacht sie im absteigenden Aste ihrer Bewegung unter SE-Steuerung bei Vorwärtsneigung ihrer senkrechten Achse, erreicht ihren flachsten Stand bei senkrechter Achsenlage und vertieft sich im

aufsteigenden Aste ihrer Bahn unter NE-Steuerung bei Rückwärtsneigung ihrer senkrechten Achse, bis sie unter dem Höhenhoch liegend, ihren tiefsten Kerndruck aufzeigt.

Die steuernde Wirkung geht also bei quasistationären Hoch- und Tiefdrucklagen in der Stratosphäre nur von dieser oberen Druckverteilung aus.

Weiterhin wurde festgestellt, daß die Amplitude der Bahn des Zentrums der Bodendruckstörungen proportional der Amplitude der oberen primären Druckwelle ist. Je größer die Schwankung der oberen Druckwelle ist, desto größer ist die Verlagerung der Bodendruckstörung bei ihrer allgemeinen West—Ost-Bewegung nach Norden bzw. Süden; desto größer ist daher die Wirkung der Steuerung.

Aber nicht nur von der oberen Amplitude hängt die Amplitude der Bewegungsbahn der Bodendruckstörung ab, sondern auch von dem Verhältnis der Perioden der oberen und unteren Druckwellen. Wenn die Periode der oberen Druckwelle gleich wird der Periode einer gleichlangen troposphärischen Welle, so haben wir es mit einem Resonnanzeffekt zu tun und die Amplitude der Tiefdruckbahn am Boden wird theoretisch unendlich groß. Dieses Resultat besagt, daß bei Steuerungsvorgängen nicht allein die obere Druckwelle maßgeblich ist, sondern auch der Einfluß des Aufbaues der Troposphäre und dessen Einklang oder Gegensätzlichkeit mit dem Verlauf der oberen Druckwelle durchaus beachtliche Verstärkung oder Schwächung der Steuerung hervorrufen kann. Ein Zusammenspiel von Stratosphäre und Troposphäre, auf das v. Ficker immer wieder hingewiesen hat und das die Einheitlichkeit der Erdatmosphäre als Ganzes beinhaltet, wird damit von theoretischer Seite her näher beleuchtet.

Eine Steuerung der Bodendruckstörungen tritt also dann und nur dann auf, wenn die Periode der oberen Welle groß ist gegenüber der Periode der Bodendruckwelle, also im allgemeinen nur bei *quasistationären* Höhendruckverteilungen.

Fast möchte man von der theoretischen Seite her schließen, daß bei einer relativ zur Bodendruckwelle sich rasch verlagernden oberen Druckwelle der Steuerungssinn umgekehrt erfolgen müßte und eine Steuerung der Bodentiefdruckgebiete in einem, den obigen Ausführungen gegensätzlichen Sinne erfolgen müßte. Aber es ist ja verständlich, daß eine rasch sich ändernde Höhendruckwelle eine Vielfalt steuernder Einflüsse auf die Bewegung der Bodenstörung ausübt, die eine gleichsinnige Verlagerung nach einer Richtung hin über mehrere Tage hinweg nicht zu erzielen vermag.

In einem weiteren Kapitel wird die merkwürdige Erscheinung der Zweiteilung von Bodendruckstörungen und ihrer Druckänderungsgebiete behandelt. Als Tatsache ist die Spaltung der Zyklone am Boden bei SE-Steuerung festzustellen, die sich in der Bildung eines Hochdruckrückens an ihrem Nordrande und nördlich von diesem in der Bildung eines zweiten Tiefdruckgebietes äußert. Auf theoretischem Wege wird anschließend die Bedingung für die Spaltung diskutiert, die durch das

Imaginärwerden eines Teilgliedes der Lösungsgleichung für den Bodendruck ihren mathematischen Ausdruck findet. Es gelingt, die genauen Zeiten der Spaltung bzw. des Auftretens eines zweiten Tiefdruckgebietes im Norden in den Breiten 80° bzw. 70° zu berechnen und das Ende der Spaltung bei NE-Steuerung zu ermitteln.

Es wurde weiterhin gezeigt, daß eine Spaltung nur bei SE-Steuerung der Hauptbodenstörung, ein Spaltungsende nur bei NE-Steuerung erfolgen kann. Die Dauer der Spaltung hängt von der Lage der Bodendruckstörung am Anfangstage ab und welcher Art von Steuerung sie zu dieser Zeit $t = 0$ unterworfen ist. Je länger die Dauer der Spaltung, desto intensiver ist die Spaltung und desto tiefer wird das nördliche zweite Spaltungstief. Wann die Spaltung einsetzt, hängt ab von der Breitenlage der Störung am Anfangstag ($t = 0$). Es wird gezeigt, daß, wenn SE-Steuerung zur Zeit $t = 0$ vorhanden ist, die Zyklone in 80° bzw. 70° Breite spaltet, wenn sie zirka 2 bzw. 7° südlich der Breite des Anfangstages auf ihrem südöstlichen Wege liegt. Ist am Anfangstag NE-Steuerung vorhanden, dann spaltet das Bodentief nicht, sondern muß erst nach einer gewissen Zeit einer SE-Steuerung unterworfen werden, die Breite des Anfangstages erreichen und dann noch weitere zwei Breitengrade südostwärts ziehen, um Spaltungserscheinungen in 80° Breite zu zeigen. Zum Vorgang der Spaltung gehören also ganz bestimmte Bedingungen in der Lage des Tiefdruckgebietes am Boden zur Lage des oberen Drucksystems. Die stärkste Intensität der Spaltung fällt mit der südlichsten Lage der Hauptstörung zusammen, deren tiefster Stand dort dem tiefsten Stand des nördlichen Spaltungstiefs gegenübersteht. Stärkste Spaltungsintensität fällt also mit dem Zeitpunkt der Umsteuerung der Hauptzyklone von SE nach NE zusammen.

Ein Vergleich mit Teilungen von Drucksteiggebieten, wie H. Hoinkes aus synoptischem Material untersucht hat, zeigt beste Übereinstimmung seiner Ergebnisse mit den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit.

Als letztes wird eine theoretische und rechnerische Abschätzung der Bodendruckänderung im Gesamtbereich einer Bodendruckstörung in zwei 24stündigen Stadien seiner Bahn im ab- bzw. aufsteigenden Aste, d. h. bei SE- bzw. NE-Steuerung, vorgenommen. Die Bodendruckänderung wurde gemäß den aufgestellten theoretischen Überlegungen für jedes Stadium in je drei Terme aufgespalten, deren erster den stratosphärischen Anteil und deren zweiter und dritter den troposphärischen Anteil an der Bodendruckänderung ausmacht. Das zweite Glied beinhaltet den Druckeffekt, der von der Verteilung der Mitteltemperatur in der Troposphäre herrührt und das dritte Glied den Druckeffekt, der durch die Zirkulation der troposphärischen Zyklone selbst ausgelöst wird. Das Zusammenspiel von Steuerung, Intensitätsschwankung und Spaltung mit diesen Anteilen der Bodendruckänderung und der Verteilung der Bodendruckänderung im Zyklonenbereich wird eingehend erörtert. Eine prozentuale Abschätzung des Anteiles jeder der drei Druckänderungsglieder an der Bodendruckänderung führt zu dem wichtigen Ergebnis, daß das nördliche Spaltungsglied durch stratosphärisch-obere Druck-

änderung, das SE-abziehende Haupttiefdruckgebiet durch meist troposphärische oder mit oberen kombinierte Druckänderungen (komplexe) beeinflußt und erzeugt ist. Diese Feststellung deckt sich mit den praktischen Ergebnissen von H. Hoinkes, der diese Tatsache aerologisch fundiert und ausgesprochen hat, in bester lückenloser Weise, wie auch damit die Vermutungen v. Fickers aus den früheren Jahren eine Bestätigung erhalten.

Es ist zweifellos erstaunlich, welche Resultate die reine Mathematik unter Zuhilfenahme der einfachsten Grundannahmen der theoretischen Meteorologie liefert und wie diese Resultate doch in fast allen wichtigen Punkten die tatsächlich in der Natur vorkommenden Erscheinungen nachzubilden und zu erfüllen vermögen. Der Nachweis der steuernden Wirkung einer quasistationären Höhendruckverteilung auf wandernde Bodenstörungen in theoretischer Hinsicht ist das wichtigste Ergebnis der vorliegenden Arbeit. Die Theorie ergibt auch ein den Beobachtungen völlig entsprechendes Bild der bei der Steuerung auftretenden Intensitätsschwankung der Bodentiefdruckgebiete und der Teilung bzw. Spaltung derselben.

Es kann der Hoffnung Ausdruck gegeben werden, daß zur inneren Stütze der synoptischen Arbeit und Erfahrung diese theoretische Untersuchung ein wesentliches beitragen wird und daß der Fragenkomplex der Steuerung durch diese Untersuchung von seiner verwirrenden Vielfalt der Auffassungen und Deutungen einem einfacheren und verständlicheren Wege zugeführt wird.

Die für die Synoptik wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit seien in Kürze abschließend in acht Regeln zusammengefaßt:

1. Eine steuernde Wirkung der Druckverteilung in der Höhe auf die Bewegung der Bodentiefdruckgebiete tritt nur ein, wenn diese sich langsamer von Westen nach Osten fortbewegt als die troposphärischen Druckwellen. Die beste steuernde Wirkung ist vorhanden, wenn in der Höhe eine quasistationäre Druckverteilung besteht, unter welcher die troposphärischen Druckgebilde in rascher Folge von Westen nach Osten hindurchziehen.

2. Bei Vorhandensein eines stationären bzw. quasistationären Hochdruckgebietes in der Höhe gilt:

a) An seiner Westseite bewirkt es NE-Steuerung der Bodenstörungen.

b) An seiner Ostseite bewirkt es SE-Steuerung der Bodenstörungen.

c) Die Bodenstörung vertieft sich unter NE-Steuerung (siehe z. B. Vertiefung einer Zyklone auf der van Bebberschen Zugstraße 5b).

d) Die Bodenstörung erreicht ihren tiefsten Entwicklungsstand in ihrer nördlichsten Breitenlage genau unter dem Zentrum des Höhenmaximums.

e) Bei SE-Steuerung füllt sie sich wieder auf.

3. Bei Vorhandensein eines stationären bzw. quasistationären Tiefdruckgebietes in der Höhe gilt:

a) An seiner Westseite bewirkt es SE-Steuerung der Bodenstörungen.

b) An seiner Ostseite bewirkt es NE-Steuerung der Bodenstörungen.

c) Bei SE-Steuerung füllt sich das Bodentief auf (analog zu oben).

d) Es erreicht seinen flachsten Zustand genau unter dem Zentrum des Höhentiefdruckgebietes.

e) Es vertieft sich bei NE-Steuerung (analog zu oben).

4. Eine Bodendruckstörung wird um ein quasistationäres Hochdruckgebiet in der Höhe im Uhrzeigersinn und um ein quasistationäres Tief in der Höhe entgegen dem Uhrzeigersinn herumgesteuert.

5. Die Amplitude der Bewegungsbahn der Bodendruckstörungen ist proportional der Amplitude der Höhendruckschwankung. Das Ausmaß der Steuerung ist abhängig von der Intensität der oberen Druckverteilung; je kräftiger diese ist, desto kräftigeren meridionalen Verlagerungen unterliegen die Bodendruckstörungen.

6. Die Steuerung durch die obere Druckverteilung ist um so wirksamer, je schneller die Bodendruckstörungen wandern.

7. Bei SE-Steuerung tritt bei Erreichung einer gewissen geographischen Breite eine Spaltung sowohl der Tiefdruckgebiete am Boden als auch der Druckänderungsgebiete auf, d. h. es schiebt sich zwischen einem neu auftretenden Tiefdruckgebiet im Norden (das scheinbar von NW her neu in die Wetterkarte eintritt) und der nach SE-abziehenden Hauptdepression ein Hochdruckrücken ein (siehe synoptische Untersuchung von H. Hoinkes).

b) Bei weiterer SE-Steuerung der Hauptdepression und gleichzeitigem Auffüllen derselben vertieft sich die nördliche Teilzyklone kräftig, und erreicht ihre größte Ausdehnung nach Süden zu und ihre größte Intensität, wenn die Hauptzyklone ihren südlichsten Punkt erreicht hat.

c) Im aufsteigenden Aste, unter NE-Steuerung erfolgt Auffüllen des nördlichen Spaltungstiefs und damit Auflösung der Spaltung unter Vertiefung und Zentrierung der Hauptzyklone. Damit hängt der Spaltungsvorgang und die steuernde Wirkung der oberen Druckverteilung innig zusammen.

8. Zeitdauer, Intensität der Spaltung sowie Eintrittszeit und Ende derselben sind geknüpft an die Breitenlage der troposphärischen Druckstörungen bei Eintritt der steuernden Wirkung des oberen Drucksystems. Je südlicher diese Wirkung einsetzt, desto länger ist die Spaltungsdauer, desto intensiver ist die nördliche Teilzyklone.

Literaturverzeichnis.

1. Ficker, H. v.: Beziehungen zwischen Änderungen des Luftdruckes und der Temperatur in den unteren Schichten der Troposphäre (Zusammensetzung der Depressionen). Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. i. Wien. Math.-nat. Kl. **129**, (1920), 763.

2. Ficker, H. v.: Bemerkungen über die Konstitution zusammengesetzter Depressionen. Meteorol. Z. **38**, 65 (1921).

3. Ficker, H. v.: Über den Druckeffekt stratosphärischer Kälteeinbrüche. Meteorol. Z. **38**, 369, (1921).

4. Ficker, H. v.: Bemerkungen zu dem Aufsatz F. M. Exners über den Aufbau hoher Zyklonen und Antizyklonen in Europa. Meteorol. Z. **39**, 86 (1922).
5. Ficker, H. v.: Die Änderung der Größe der Luftdruckschwankungen in den untersten Schichten der Atmosphäre. Meteorol. Z. **37**, 145 (1920).
6. Ficker, H. v.: Beziehungen zwischen Druck- und Temperaturänderungen in der Troposphäre. Meteorol. Z. **37**, 347 (1920).
7. Ficker, H. v.: Der Einfluß der Alpen auf Fallgebiete des Luftdrucks und die Entstehung von Depressionen über dem Mittelmeer. Meteorol. Z. **37**, 350 (1920).
8. Ficker, H. v.: Beziehungen zwischen Druck und Temperatur in der freien Atmosphäre. Beitr. Phys. d. freien Atmosphäre **10**, 51 (1922).
9. Ficker, H. v.: Zur Frage der Steuerung in der Atmosphäre. Meteorol. Z. **55**, 8 (1938).
10. Defant, A.: Theoretische Überlegungen und experimentelle Untersuchungen zum Aufbau hoher Zyklonen und Antizyklonen. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien. Math.-nat. Kl., **132**, 81 (1923).
11. Defant, A.: Schwingungen einer zweifach geschichteten Atmosphäre und ihr Verhältnis zu den Wellen im Luftmeer. Beitr. Phys. der freien Atmosphäre, **12**, 112 (1925).
12. Defant, A.: Primäre und sekundäre, freie und erzwungene Druckwellen in der Atmosphäre. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien. Math.-nat. Kl. **135**, 357 (1926).
13. Stüve, G.: Thermozyklogenese. Beitr. Phys. d. freien Atmosphäre **13**, 23 (1926).
14. Philipps, H.: Die Störungen des zonalen atmosphärischen Grundzustandes durch stratosphärische Druckwellen. Reichsamt für Wetterdienst, Wiss. Abh. II, 3, Berlin 1936.
15. Defant, F.: Grundlagen einer Theorie des jährlichen Luftdruckganges. Geografiska Annaler, **29**, 20 (1947).
16. Hann-Süring: Lehrbuch der Meteorologie. 5. Aufl.
17. Hoinkes, H.: Regeneration und Teilung langlebiger Drucksteiggebiete. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien. Math.-nat. Kl. **149**, 367 (1940).
18. Hoinkes, H.: Über Teilungen und Kreuzungen von Steiggebieten des Luftdruckes. Ann. Hydrogr. u. mar. Meteorol. **69**, 40 (1941).

551.524.34 (431) : 523.74

Die Wintertemperaturen in Berlin und die Sonnenfleckenrelativzahlen.

Von

R. Scherhag, Bad Kissingen.

Mit 2 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die zweimal fünffach übergreifende Mittelbildung der 200jährigen Berliner Temperaturreihe entschleiert deren enge Beziehung zur Sonnenfleckentätigkeit, da, von zwei Ausnahmen abgesehen, jede Sonnenfleckenperiode durch eine entsprechende Schwankung der Temperaturkurve in Erscheinung tritt und zugleich keine andere Schwingung auch nur annähernd so deutlich erkennbar ist. Im Mittel waren die dem Sonnenfleckenmaximum folgenden Winter am kältesten und jene $1^1/_2$ Jahre vor dem Minimum am wärmsten. Insgesamt erreicht diese Schwankung aber, bei fünf- und dreifachem Ausgleich, nicht ganz $^1/_2{}^\circ$ C und damit bei weitem nicht die Amplitude, die die harmonische Analyse z. B. für eine 16jährige Periode ergibt. Dies ist aber ein rein formales Ergebnis, dadurch hervorgerufen, daß die Sonnenfleckenschwingung der Temperatur, die in den Tropen so dominierend in Erscheinung tritt, in Mitteleuropa auch noch einen periodischen Phasenwechsel aufweist, indem die kalten Winter im zweiten Viertel des vorigen und in diesem Jahrhundert kurz *nach*, während der übrigen Zeit dagegen 3 Jahre *vor* dem Fleckenmaximum eintraten. Dementsprechend ergibt eine damit in Übereinstimmung gebrachte Unterteilung in zwei Phasengruppen den Sonnenfleckeneinfluß außerordentlich klar, wobei die Schwankung in der einen Jahresgruppe 1°, in der anderen beinahe 2° C beträgt. Die Phasensprünge scheinen mit der etwa 89jährigen Schwankung der Sonnenfleckentätigkeit zusammenzuhängen und sind damit wahrscheinlich durch die verschiedene Intensität der Zirkulationsräder und die Vereisung der Polargebiete bestimmt. Dieser langperiodige Einfluß der Sonnenfleckentätigkeit tritt besonders in den von KÖPPEN berechneten Mitteltemperaturen der ganzen Erde hervor, die bei Fleckenrelativzahlen über 100 fast 0,5° kälter ist als in den Jahren mit einer Relativzahl unter 10.

Summary. The 200 years temperature records for Berlin, twice smoothed by calculating the means of all five values of five year averages, reveal their close connection with the sunspot activity, in that, apart from two exceptions, each sunspot period is associated with a characteristic point of the accom-

panying temperature cycle, and, furthermore, no other oscillation is clearly discernable. Averaging the whole series of observations, the winters following the sunspot maxima were the coldest, and those $1^1/_2$ years before the sunspot minimum were the warmest. On the other hand, the amplitude of this oscillation does not even reach $^1/_2$° C., and is far below the value of a 16-years period. However, this results from the fact that the sunspot variation of temperature being such a dominant feature in the tropical regions is subjected to a periodical change in phasis over central Europe in that the cold winter occured closely after the sunspot maximum in the second quarter of the preceding and in the current century contrary to the periods left when they reached their greatest frequency 3 years *before* sunspot maximum. Accordingly, by considering both groups of phasis separately, the influence of the sunspot activity becomes distinctly pronounced amounting to about 1° C., or even 2° C., in the respective periods. The leaps in the phasis seem to be associated with the 89-years period of sunspot activity, and thus probably are originated by the respective intensity of the atmospheric circulation and the amount of the ice cover in the polar regions. This long-periodical influence of the sunspot activity is especially clearly shown by mean temperatures of the whole earth calculated by Köppen in that this temperature is nearly 0,5° C. lower in the years distinguished by a sunspot number greater than 100 compared with the years of sunspot numbers below 10.

Résumé. Lorsqu'on étudie la série d'observations de température de 200 ans à Berlin en calculant les valeurs pondérées par la méthode des moyennes quinquennales chevauchées, on fait apparaître la relation étroite entre la température et l'activité des taches solaires; à deux exceptions près, chaque période de taches est accompagnée d'une variation correspondante de la température, et aucune autre variation n'est aussi nette que celle-ci. En moyenne, les hivers succédant aux maxima d'activité solaire sont les plus froids, et ceux qui précèdent d'une année et demie les minima sont les plus chauds. Dans l'ensemble l'amplitude n'atteint pas tout à fait $^1/_2$ degré et reste ainsi bien inférieure à celle que l'analyse harmonique met en évidence par exemple pour une période de 16 ans. Cela n'est qu'un résultat purement formel provenant du fait que la variation de la temperature en relation avec les taches solaires qui apparaît si nettement sous les tropiques présente de plus en Europe centrale un changement périodique de phase, dans ce sens que dans le deuxième quart du siècle dernier et dans le siècle présent les hivers froids ont lieu peu après le maximum des taches, tandis qu'ils précèdent de trois ans ce maximum dans les autres périodes. Si l'on tient compte de cette variation de phase, l'influence des taches solaires apparaît très nettement: dans un des groupes d'années, l'amplitude est de 1°, et dans l'autre de presque 2°. Le changement de phase semble être en rapport avec la période d'environ 89 ans de l'activité solaire et découle probablement de la variation d'intensité de la circulation atmosphérique et de la glaciation des régions polaires. L'effet à longue période de l'activité solaire apparaît particulièrement bien dans les températures moyennes de l'ensemble du globe calculées par Köppen; pour un nombre relatif de taches supérieur à 100, elles sont près de 0,5° plus basses que pendant les années à nombre relatif inférieur à 10.

Col. Don McNeal hat, beeindruckt durch das Erlebnis des katastrophalsten Winters — 1946/47 — der Berliner Geschichte, Wintertemperaturen (Dezember bis Februar) der mehr als 200jährigen Temperatur-

reihe der deutschen Hauptstadt einer zweimal fünffach übergreifenden Glättung unterzogen. Das Ergebnis ist so interessant, daß es im folgenden genauer diskutiert werden soll, nachdem die Berliner Temperaturbeobachtungen noch einige Reduktionen erfahren haben.

Tabelle 1. *Wintertemperaturen (Dez.—Febr.) Berlin, Innere Stadt* [Reduktionen: BRAND, 1756—1773: — 1,5°, Dahlem ab 1937: + 0,6°].

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1720	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1,8
1730	—	—1,0	+0,8	+1,2	+3,0	+1,2	+0,2	+2,2	+0,7	+1,9
1740	—4,8	+1,0	+0,6	+0,3	—0,8	—0,7	—0,2	+2,9	—0,1	+3,2
1750	+3,1	—0,2	—	—	—	—	+3,6	+0,8	—1,8	+2,2
1760	—2,6	+1,8	—0,5	—0,6	+3,4	—1,3	—0,2	—1,8	—2,7	+0,3
1770	+0,1	—1,2	+1,1	+1,1	+2,3	+0,8	—1,1	—1,1	—1,3	+2,7
1780	—1,0	—0,9	—0,5	+2,5	—4,4	—2,2	—0,9	—0,3	—0,7	—4,5
1790	+3,2	+2,4	—0,7	+0,4	+1,8	—3,9	+3,6	0,0	+1,5	—5,2
1800	—4,5	—0,3	—0,5	—1,3	—0,8	—4,7	+1,5	+1,8	—0,2	—3,2
1810	—0,8	—1,7	—0,6	—2,5	—3,4	—0,8	—1,8	+1,0	+0,4	+0,7
1820	—2,9	—1,3	+3,3	—5,1	+2,5	+2,6	—0,3	—2,2	—0,4	—2,7
1830	—6,6	—1,7	+0,4	+0,4	+3,0	+1,7	—0,5	+0,7	—5,0	+0,6
1840	—0,3	—3,6	+0,2	+2,3	+0,7	—3,4	+1,9	—2,7	—2,4	+1,1
1850	—1,6	+1,4	+2,4	+2,1	—0,9	—2,3	—0,7	+0,4	—0,4	+2,1
1860	+0,0	—1,3	—0,1	+2,5	—0,4	—2,6	+3,7	+3,3	+1,2	+3,4
1870	—1,3	—3,3	+0,3	+2,3	+2,9	—0,5	—0,2	+2,5	+2,7	—0,2
1880	—1,2	—0,2	+2,3	+1,4	+3,2	+1,5	—1,1	—0,2	—0,6	—0,6
1890	+0,6	—2,2	+0,9	—1,8	+1,2	—1,9	+0,4	—0,8	+2,6	+3,5
1900	—0,2	—0,7	+1,7	+1,3	+0,4	+2,0	+2,0	—0,7	+1,4	—1,0
1910	+2,9	+2,2	+0,9	+2,3	+2,0	+2,3	+2,8	—0,6	+1,2	+2,2
1920	+2,3	+2,7	—0,9	+2,2	—2,0	+3,9	+1,7	+2,3	+1,0	—4,3
1930	+2,9	+0,7	+1,5	+0,4	+0,8	+2,8	+2,0	+1,0	+1,6	+2,1
1940	—5,3	—2,1	—2,7	+1,2	+2,4	+0,7	+1,2	—5,0	+2,3	—

Gesamtmittel: +0,14° C

G. HELLMANN [*1*] hat die Berliner Temperaturreihe in bezug auf ihre Homogenität einer eingehenden Prüfung unterzogen und kommt dabei zu dem Ergebnis, daß die Reihe von BRAND 1756 bis 1773 zu hohe Werte angibt. Vergleicht man sie mit den gleichzeitigen Beobachtungen von BEGUELIN [*2*], so ergibt sich eine erforderliche Reduktion der BRANDschen Reihe von — 1.5° für die Wintermonate Dezember bis Februar. Da diese Beobachtungen alle im Inneren der Stadt ausgeführt wurden und auch in der „Klimakunde des Deutschen Reiches" [*3*] die Monatsmittel der Landwirtschaftlichen Hochschule in der Invalidenstraße veröffentlicht sind, wurden zur Wahrung der Einheitlichkeit für diese Untersuchungen auch die neuesten Werte auf die Berliner Innenstadt reduziert. Daß damit der Stadteinfluß in dieser Reihe enthalten sein muß, ist für die Untersuchung der periodischen Vorgänge ohne Bedeutung.

Für die Jahre 1931 bis 1936 konnten die Monatsmittel der Invalidenstraße dem Deutschen Meteorologischen Jahrbuch entnommen werden, während für die letzten zehn Jahre die Beobachtungen der im westlichen

Teil der Stadt gelegenen Station Dahlem zugrunde gelegt wurden. Ein Vergleich für die Jahre 1931 bis 1937 ergibt für die angeführten Wintermonate einen Temperaturüberschuß der Invalidenstraße von + 0,6° gegenüber Dahlem, und um diesen Betrag wurden die entsprechenden Dahlemer Werte erhöht.

Tabelle 2. *Zweimal fünffach übergreifend ausgeglichene Wintertemperaturen (Dez.—Febr.) Berlin, Innere Stadt.*

[Reduktionen: Brand 1756—1873. — 1,5°, Dahlem ab 1937: + 0,6°.]
[1800 = Winter 1799/1800.]

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1730	—	—	—	—	—	+1,32	+1,12	+0,90	+0,56	+0,23
1740	—0,16	—0,16	—0,23	—0,14	—0,06	+0,29	+0,63	+1,02	—	—
1750			—		—	—				
1760	+0,14	+0,16	+0,18	+0,20	+0,08	—0,21	—0,19	—0,74	—0,81	—0,65
1770	—0,29	+0,05	+0,43	+0,60	+0,53	+0,40	+0,16	—0,07	—0,19	—0,06
1780	—0,24	—0,38	0,54	—0,71	—1,16	—1,34	1,24	1,02	0,82	—0,45
1790	+0,18	+0,30	+0,35	+0,44	+0,53	+0,08	—0,10	—0,49	—0,92	—1,52
1800	—1,65	—1,77	—1,66	—1,44	—1,07	—0,96	—0,70	—0,63	—0,75	—1,00
1810	—1,17	—1,50	—1,70	—1,74	—1,57	—1,23	—0,97	—0,69	—0,38	—0,41
1820	—0,53	—0,35	—0,14	—0,25	+0,05	+0,07	—0,50	—1,16	—1,50	—2,00
1830	—2,01	—1,42	—0,68	0,02	+0,38	+0,46	+0,13	—0,38	—0,91	—0,94
1840	—0,87	—0,84	—0,47	—0,19	—0,40	—0,59	—0,62	—0,82	—0,74	—0,28
1850	+0,07	+0,37	+0,52	+0,43	+0,06	—0,12	—0,17	—0,16	—0,09	+0,19
1860	+0,26	+0,12	+0,22	+0,46	+0,54	+0,88	+1,36	+1,37	+1,12	+0,97
1870	+0,65	+0,30	+0,36	+0,63	+0,87	+1,01	+1,08	+1,04	+0,89	+0,68
1880	+0,73	+0,91	+1,06	+1,12	+1,14	+0,88	+0,48	+0,07	—0,20	—0,44
1890	—0,45	—0,52	—0,45	—0,49	—0,31	—0,10	+0,27	+0,49	+0,88	+1,05
1900	+1,00	+0,96	+1,08	+1,01	+0,99	+1,04	+1,03	+0,93	+0,98	+1,07
1910	+1,34	+1,54	+1,76	+1,86	+1,87	+1,78	+1,70	+1,60	+1,55	+1,58
1920	+1,44	+1,36	+1,24	+1,27	+1,20	+1,22	+1,12	+1,03	+0,78	+0,55
1930	+0,62	+0,72	+0,92	+1,13	+1,41	+1,54	+1,34	+0,94	+0,40	—0,20
1940	—0,84	—0,92	—0,69	—0,42	—0,08	—	—	—	—	—

Sämtliche auf diese Weise homogenisierten Wintermittel von Berlin sind in Tabelle 1 zusammengestellt, wobei noch zu bemerken ist, daß sich die angegebene Jahreszahl jeweils auf Januar und Februar des betreffenden Winters bezieht, also z. B. mit 1929 der Winter 1928/29 gemeint ist. Das Gesamtmittel beträgt + 0,14° C.

Der kälteste Winter dieser Reihe war jener von 1829/30 mit einer Mitteltemperatur der Monate Dezember—Februar von — 6,6°. Obwohl der zunehmende Stadteinfluß mit Sicherheit eine positive Verfälschung der angezogenen Reihe verursacht, liegt hinsichtlich der Strenge der Winter 1939/40 mit — 5,3° an zweiter, der von 1946/47 an vierter und 1928/29 an elfter Stelle. Ein weiteres auffallendes Merkmal besteht darin, daß der 90jährige Zeitraum von 1838 bis 1929 völlig frei war von extrem kalten Wintern mit einer negativen Temperaturabweichung von mehr als 4°, eine Wärmeperiode, die ihren Höhepunkt in der zweiten

Dekade dieses Jahrhunderts erreichte, in welcher lediglich ein Winter (1916/17) eine schwache negative Temperaturabweichung aufwies. Der Rückfall zu strengen Wintern in der laufenden Dekade ist um so abrupter und macht sie voraussichtlich zu der absolut kältesten der ganzen Reihe trotz des nicht eliminierten Stadteinflusses.

In Tabelle 2 sind die zweimal fünffach übergreifenden* mittleren Wintertemperaturen für Berlin zusammengestellt. Der niedrigste Wert unter —2° wurde für das mittlere Jahr 1830, dagegen eine beinahe 4° höhere Temperatur für die Mitte des zweiten Jahrzehnts unseres Jahrhunderts berechnet. Die einzelnen Schwingungen lassen sich am besten an Hand der Abb. 1 verfolgen, die die Zahlenwerte der Tabelle 2 graphisch darstellt und außerdem am unteren Rande durch besondere Punkte die Jahre der Sonnenfleckenmaxima enthält. Bei Betrachtung dieser Kurve fällt nämlich sofort auf, daß sie in enger Beziehung zur Sonnenfleckenperiode steht und damit die früheren eindeutigen Ergebnisse von W. Köppen [4] ergänzt, wenn auch gewisse Phasenverschiebungen zeitweilig auftreten.

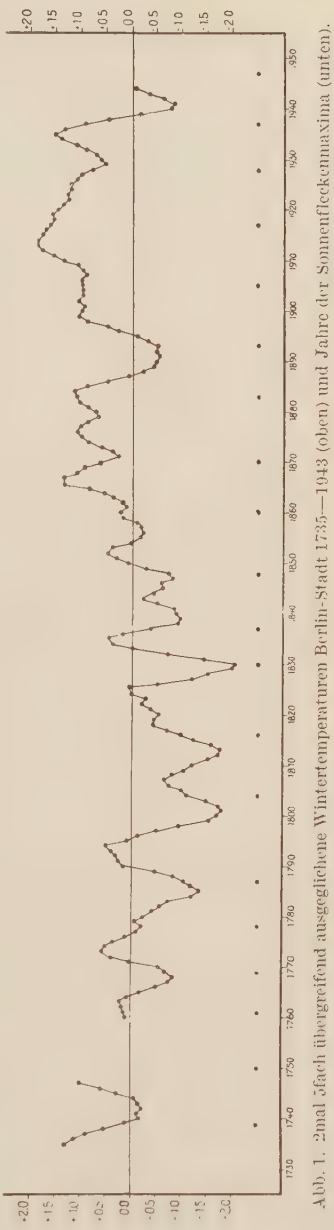


Abb. 1. 2mal 5fach übergreifend ausgeglichene Wintertemperaturen Berlin-Stadt 1735—1943 (oben) und Jahre der Sonnenfleckenmaxima (unten).

---

* Als fünffach übergreifend ausgeglichene Werte der Zahlenreihe a, b, c, ... werden die Beträge

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} = c',$$

$$\frac{b+c+d+e+f}{5} = d'$$

usw. und als zweimal fünffach übergreifende Ausgleichung die Reihe

$$\frac{c'+d'+e'+f'+g'}{5} = e'',$$

$$\frac{d'+e'+f'+g'+h'}{5} = f''$$

usw. bezeichnet. Durch Einsetzen kann man leicht sehen, daß z. B.

$$e'' = \frac{a+2b+3c+4d+5e+4f+3g+2h+i}{25}$$ ist.

Um diese Beziehung zwischen den Sonnenflecken und der Berliner Wintertemperatur rechnerisch zu beweisen, sind im folgenden die Winter so in bezug auf die Sonnenfleckenperiode gruppiert worden, daß alle, dem dreijährig ausgeglichenen Jahr des Minimums bzw. Maximums der Sonnenfleckentätigkeit folgenden Winter untereinander geschrieben wurden. Dasselbe geschah mit den Wintern $^1/_2$ Jahr vor bzw. $1^1/_2$ Jahre nach dem Sonnenfleckenextrem, als Mi — 1, Mi + 1 bzw. Max — 1 und

Tabelle 3. *Die Sonnenfleckenperiode seit 1729.*

Mi −2	Mi −1	Mi	Mi +1	Mi +2	Max −1	Max	Max +1	Max +2	Max +3	Mi −3
						1728	1729	1730	1731	1732
1733	1734	1735	1736	1737	1738	1739	1740	1741	1742	1743
1744	1745	1746	1747	1748	1749	1750	1751	1752	1753	
	1754	1755	1756	1757						
				1758						
				1759	1760	1761	1762	1763	1764	
	1765	1766	1767	1768	1769	1770	1771	1772	1773	
	1774	1775	1776		1777	1778	1779	1780	1781	
1782	1783	1784	1785	1786	1787	1788	1789	1790	1791	1792
										1793
										1794
										1795
1796	1797	1798	1799	1800						
				1801	1802	1803	1804	1805	1806	1807
1808	1809	1810	1811	1812						
				1813						
				1814	1815	1816	1817	1818	1819	1820
1821	1822	1823	1824	1825						
				1826						
				1827	1828	1829	1830	1831		
	1832	1833	1834	1835	1836	1837	1838	1839	1840	
1841	1842	1843	1844	1845						
				1846	1847	1848	1849	1850	1851	1852
										1853
1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	
1864	1865	1866	1867	1868						
				1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875
1876	1877	1878	1879	1880						
				1881	1882	1883	1884	1885	1886	
1887	1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897
										1898
1899	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909
1910	1911	1912	1913	1914						
				1915	1916	1917	1918	1919	1920	
1921	1922	1923	1924	1925						
				1926	1927	1928	1929	1930	1931	
	1932	1933	1934	1935						
				1936	1937	1938	1939	1940	1941	
	1942	1943	1944	1945	1946	1947				

Max + 1 usw. bezeichnet. Da aber die längste Sonnenfleckenperiode von 1788 bis 1803 15 Jahre und jene von 1770 bis 1778 sowie von 1829 bis 1837 nur 8 Jahre umfaßte, müssen die zwischen den Extremwerten liegenden Winter aufgeteilt werden. Dies wurde in der Weise gehandhabt, daß die überzähligen Jahre der langen Fleckenperioden sämtlich auf die Phasen Mi — 3 und Mi + 2 verteilt wurden und dafür zum Ausgleich bei den kurzen Perioden diese Phasen ausgelassen und bei den noch kürzeren Perioden auch die benachbarten Phasen freiblieben. Auf diese Weise erhält man das in Tabelle 3 zusammengestellte Schema, in welchem angenommen wurde, daß die beiden Fleckenperioden vor 1750, von welchem Jahre ab genaue Aufzeichnungen vorliegen, von 11jähriger Dauer waren.

Die nach diesem Schema zusammengestellten Wintertemperaturen enthält Tabelle 4. Wie man sofort sieht, waren die den Sonnenflecken-

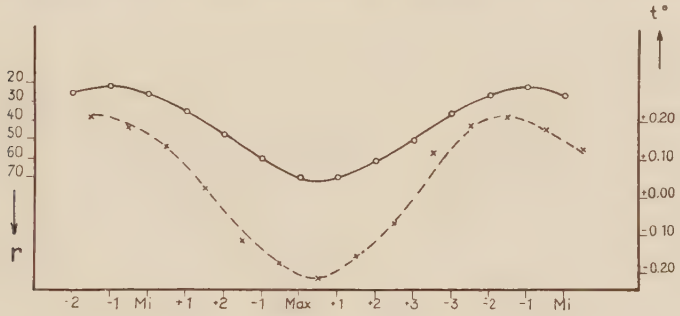


Abb. 2. Die 11jährige Sonnenfleckenperiode (oben, in reziproker Darstellung) und die Berliner Wintertemperaturen (unten) bei 5- und 3fach übergreifender Mittelbildung.

maxima folgenden Winter in vielen Fällen besonders kalt, und unter den 12 kältesten Wintern fallen 5 (1739/40, 1788/89, 1829/30, 1837/38 und 1928/29) in diese Phase und noch 3 weitere (1804/05, 1939/40 und 1946/47) in die benachbarten Jahre, so daß insgesamt 8 von diesen 12 extremen Wintern mit dem Sonnenfleckenmaximum gekoppelt auftraten. Dementsprechend beträgt die Mitteltemperatur, dritte Zeile von unten, —0,8° für die dem Sonnenfleckenmaximum folgenden Winter gegenüber + 0,5° zur Zeit des Sonnenfleckenminimums. Trotzdem ist die Streuung der Einzelwerte aber so groß, daß auf Grund dieser Beziehung keine zuverlässigen Prognosen aufgestellt werden können, und es sind ebenso schon extrem kalte Winter zur Zeit des Sonnenfleckenminimums (1783/84, 1798/99, 1799/1800, 1822/23) aufgetreten.

Die tatsächlich vorhandene Beziehung zwischen der Sonnenfleckentätigkeit und der Wintertemperatur wird durch übergreifende fünffache und anschließend dreifache Ausgleichung eindeutiger dargestellt. Die jeweiligen Abweichungen vom Gesamtmittel sind in der vorletzten Reihe der Tabelle 4 und in Abb. 2 bildlich zusammen mit der invers gezeichneten und nach dem gleichen Verfahren ausgeglichenen Sonnenfleckenperiode

Tabelle 4. *Berliner Wintertemperaturen (° C) und Sonnenflecken.*

Mi $-1^1/_2$	Mi $-^1/_2$	Mi $+^1/_2$	Mi $+1^1/_2$	Mi $+2^1/_2$	Max $-^1/_2$	Max $+^1/_2$	Max $+1^1/_2$	Max $+2^1/_2$	Max $+3^1/_2$	Mi $-2^1/_2$
						−1,8		−1,0	+0,8	+1,2
+3,0	+1,2	+0,2	+2,2	+0,7	+1,9	−4,8	+1,0	+0,6	+0,3	−0,8
−0,7	−0,2	+2,9	−0,1	+3,2	+3,1	−0,2				
		+3,6	+0,8	−1,8						
				+2,2						
				−2,6	+1,8	−0,5	−0,6	+3,4	−1,3	
	−0,2	−1,8	−2,7	+0,3	+0,1	−1,2	+1,1	+1,1	+2,3	
	+0,8	−1,1	−1,1		−1,3	+2,7	−1,0	−0,9	−0,5	
+2,5	−4,4	−2,2	−0,9	−0,3	−0,7	−4,5	+3,2	+2,4	−0,7	−0,4
										+1,8
										−3,9
										+3,6
0,0	+1,5	5,2	−4,5	0,3						
				−0,5	−1,3	−0,8	−4,7	+1,5	+1,8	−0,2
−3,2	−0,8	−1,7	−0,6	−2,5						
				−3,4						
				−0,8	−1,8	+1,0	+0,4	+0,7	−2,9	−1,3
+3,3	−5,1	+2,5	+2,6	−0,3						
				−2,2						
				−0,4	−2,7	−6,6	−1,7	+0,4		
	+0,4	+3,0	+1,7	−0,5	+0,7	−5,0	+0,6	−0,3	−3,6	
+0,2	+2,3	+0,7	−3,4	+1,9						
				−2,7	−2,4	+1,1	−1,6	+1,4	+2,4	+2,1
										−0,9
−2,3	−0,7	+0,4	−0,4	+2,1	+0,0	−1,3	−0,1	+2,5	−0,4	
−2,6	+3,7	+3,3	+1,2	+3,4						
				−1,3	−3,3	+0,3	+2,3	+2,9	−0,5	−0,2
+2,5	+2,7	0,2	−1,2	−0,2						
				+2,3	+1,4	+3,2	+1,5	−1,1	−0,2	

	−0,6	−0,6	+0,6	−2,2	+0,9	−1,8	+1,2	− 1,9	+0,4	−0,8	+2,6
											+3,5
	−0,2	−0,7	+1,7	+1,3	+0,4	+2,0	+2,0	- 0,7	+1,4	−1,0	+2,9
	+ 2,2	+0,9	+2,3	+2,0	+2,3						
					+2,8	- 0,6	+1,2	+ 2,2	+2,3	+2,7	
	0,9	+ 2,2	2,0	+ 3,9	+1,7						
					+ 2,3	+1,0	−4,3	+2,9	+ 0,7	+1,5	
		+0,4	+ 0,8	+2,8	+2,0						
					+1,0	+1,6	+2,1	−5,3	−2,1	−2,7	
		+1,2	+2,4	+0,7	+1,2	−5,0					
Mittel	+0,2	+0,2	+0,5	+0,1	+0,3	−0,4	−0,8	−0,1	+0,8	−0,2	+0,8
Fünf- und dreifach übergreifende Abweichungen vom Normalwert	+0,21	+0,18	+0,13	+0,02	−0,12	- 0,18	- 0,22	−0,16	−0,07	+0,12	+0,19
Fünf- und dreifach übergreifende Abweichungen vom Normalwert der 6 stärksten Fleckenperioden ($r_{max} > 110$)	+0,21	+ 0,32	+0,26	+ 0,07	- 0,10	0,32	0,59	- 0,48	0,45	−0,18	0,00

Tabelle 6. *Die Sonnenfleckenperiode in den Berliner Wintertemperaturen (dreifach übergreifend gemittelt) verschiedener Zeiträume.*

11jähr. Fleckenphase	Mi −2	Mi − 1	Mi	Mi +1	Mi +2	Max −1	Max	Max +1	Max +2	Max +3	Mi −3
1729 −1748 1824 −1853 1899 −1948	+0,67	+0,69	+0,90	**+1,18**	+1,09	+0,60	−0,45	−0,74*	−0,52	+0,02	+ 0,71
1749 −1823 1854 −1898	−0,06	−0,09	−0,23	−0,57*	−0,41	−0,39	−0,05	−0,12	**+0,42**	+0,38	+0,39

dargestellt (die Wintertemperaturen sind dabei ebenfalls um $^1/_2$ Jahr verschoben eingezeichnet). Es ergibt sich eine fast reine Sinusschwingung mit dem niedrigsten Temperaturwert in dem dem Sonnenfleckenmaximum folgenden Winter und dem höchsten Betrag $1^1/_2$ Jahre vor dem Minimumjahr. Das Ergebnis steht in vollem Einklang mit den Resultaten, die früher auf Grund der nur 80jährigen Standardperiode 1851 bis 1930 für *Tilsit* und der 100jährigen Beobachtungsreihe 1830 bis 1930 für *Moskau* und *Leningrad* gefunden worden sind [*5*], aber die totale Schwankung erreicht hier nur 0,45° C.

Auch das weitere Ergebnis, daß die besonders starken Fleckenperioden von besonders kalten Wintern begleitet sind, wird durch diese langjährige Reihe erhärtet. Dies zeigt die letzte Horizontalreihe der Tabelle 4, in der die fünf- und dreifach übergreifenden Abweichungen[1] vom Normalwert der 6 stärksten Fleckenperioden, deren höchstes Jahresmittel der Relativzahl mehr als 110 betrug, zusammengestellt sind, und wobei sich ergibt, daß sich die Fleckenmaxima 1778, 1788, 1837, 1848, 1871 und 1947 tatsächlich durch eine größere negative Temperaturabweichung aller zugehörigen Winter auszeichneten und dabei Anomalien bis zu $-0{,}5°$ erreicht werden.

Alle diese Temperaturabweichungen bleiben aber wesentlich geringer, als es der Augenschein vermuten läßt, nachdem die Sonnenfleckenperiode in Abb. 1 doch so dominierend in Erscheinung tritt. Die Schwankungen bleiben sogar weit geringer als sie z. B. die formale harmonische Analyse für eine 16jährige Periode ergibt, und doch kann dies nur ein Zufall sein, denn sonst müßte die Temperaturkurve etwas Derartiges zeigen.

Um diesem Problem näher auf den Grund zu gehen, wurden in Tabelle 5 sämtliche in der Temperaturkurve enthaltenen mehr als $^2/_{10}°$ betragenden Schwingungen hinsichtlich des Eintrittes ihrer Maxima und Minima mit dem korrespondierenden inversen Sonnenfleckenextrem zusammengestellt, wobei noch zu beachten ist, daß sich die Jahreszahlen der Temperaturreihe jedesmal auf Januar/Februar beziehen. Nun ergibt sich, daß sich, abgesehen von den beiden Sonnenfleckenmaxima 1778 und 1917, alle anderen Maxima und Minima der Fleckentätigkeit durch kalte bzw. warme Winter zu erkennen geben, und daß anderseits die Temperaturkurve keine $^2/_{10}°$ übersteigende Schwankung außerhalb der Sonnenfleckenschwingung aufweist. Dagegen zeigt die Phasendifferenz zwischen beiden Erscheinungen auffallende Sprünge. Bis etwa 1825 und zwischen 1855 und 1900 traten die kältesten Winter im Mittel etwa 3 Jahre vor dem Fleckenmaximum, die mildesten ebenso viele Jahre vor dem Fleckenminimum auf, von 1825 bis 1855 und seit 1900 pflegen sie dagegen dem Sonnenfleckenmaximum ebenso mit einjähriger Verspätung zu folgen, wie die milden Winter dem Fleckenminimum.

[1] Entsprechend der Fußnote auf S. 237 lautet die fünf- und dreifach ausgeglichene Reihe

$$\frac{c'+d'+e'}{3},\ \frac{d'+e'+f'}{3}\ \text{usw.} = \frac{a+2b+3c+3d+3e+2f+g}{15}\ \text{usw.}$$

Tabelle 5. *Vergleich aller Maxima und Minima der ausgeglichenen Berliner Wintertemperaturreihe [(Max.—Min.) >0,20°] und der Sonnenfleckenrelativzahlen ab 1760.*

Ausgeglichene Temperaturreihe	Sonnenflecken-relativzahlen	Differenz in Jahren	Mittlere Differenz
Max 1763	Mi 1766	— 3	
Mi 1768	Max 1769	— 1	
Max 1773	Mi 1775	— 2	
	Max 1778		
	Mi 1784		— 3
Mi 1785	Max 1787	— 2	
Max 1794	Mi 1798	— 4	
Mi 1801	Max 1804	— 3	
Max 1807	Mi 1810	— 3	
Mi 1813	Max 1816	— 3	
Max 1825	Mi 1823	+ 2	
Mi 1830	Max 1830	0	
Max 1835	Mi 1833	+ 2	
Mi 1839	Max 1837	+ 2	+ ½
Max 1843	Mi 1843	0	
Mi 1847	Max 1848	— 1	
Max 1852	Mi 1856	— 4	
Mi 1856	Max 1860	— 4	
Max 1867	Mi 1867	0	
Mi 1871	Max 1870	+ 1	
Max 1876	Mi 1878	— 2	— 3
Mi 1879	Max 1883	— 4	
Max 1884	Mi 1889	— 5	
Mi 1891	Max 1893	— 2	
Max 1902	Mi 1901	+ 1	
Mi 1907	Max 1905	+ 2	
Max 1914	Mi 1913	+ 1	
	Max 1917		+ 1
	Mi 1923		
Mi 1929	Max 1928	+ 1	
Max 1935	Mi 1933	+ 2	
Mi 1941	Max 1937	+ 4	

Faßt man die Jahre 1729 bis 1748, 1824 bis 1853 und ab 1899 ebenso zu einer Gruppe zusammen wie 1749 bis 1823 und 1854 bis 1898, so treten die erwähnten Beziehungen, wie Tabelle 6 zeigt, besonders deutlich hervor. In der zuerst aufgeführten Gruppe — ausgezeichnet durch kalte Winter zur Zeit des Sonnenfleckenmaximums und warme etwas nach dem Minimum — erreicht die Schwankung beinahe 2° C. Bei der zweiten Gruppe sind die Differenzen geringer und die Phasen beinahe genau umgekehrt. Beide Perioden kompensieren sich gegenseitig im Mittel weitgehend, und dies ist der Grund, weshalb die Sonnenfleckenperiode in Mitteleuropa so wenig deutlich in Erscheinung tritt, daß sie von einigen Autoren überhaupt geleugnet wird, wogegen andere eine doppelte Welle erhalten haben [*6*].

Eine weitere interessante Frage ist jene nach der Periodizität und eventuellen Ursache der Phasensprünge. Eine nähere Betrachtung zeigt, daß dieses Phänomen mit der etwa 89jährigen Großperiode der Sonnenflecken zusammenhängt. Selbstverständlich ist der Zeitraum noch zu kurz, um in dieser Richtung zu völlig gesicherten Schlußfolgerungen zu gelangen, aber es ist doch auffallend, daß die Änderungen der Phase eine weitgehende Beziehung zu der Sonnenflecken-Großperiode aufweisen. Wie sich nämlich aus Tabelle 7, in der die mittleren Sonnenfleckenrelativzahlen für jeden zwei Perioden umfassenden Fleckenzyklus während der letzten zwei Jahrhunderte zusammengefaßt sind, ergibt, zeigte die großperiodige Sonnenfleckenschwankung Minima um (1740), 1820 und 1910 und Maxima um 1780, 1850 (und 1950), also im Abstand von etwa 90 Jahren. Rund 10 Jahre vor diesen Wendepunkten beginnt durchschnittlich der Phasenwechsel der Temperaturkurve, was Tabelle 8 beweisen soll, in der in den beiden mittleren Spalten die aus Tabelle 6 entnommenen Jahre der Phasensprünge der Temperaturreihe zusammen mit den Jahreszahlen 10 Jahre vor dem zugehörigen Fleckenextrem nebeneinander gestellt sind. Die letzte Kolumne, die die Differenzen zwischen beiden Reihen wiedergibt, zeigt in eindrucksvoller Weise die weitgehende Koinzidenz, und es kann daher wohl kein Zweifel darüber bestehen, daß wir es hier mit der von Easton [7] schon vor 20 Jahren entdeckten 89jährigen Periode in der Wiederkehr strenger Winter zu tun haben.

Tabelle 7. *Mittlere Sonnenfleckenrelativzahlen 1746 bis 1943.*

Zeitraum	1746 bis 1766	1767 bis 1784	1785 bis 1810	1811 bis 1833	1834 bis 1856	1857 bis 1878	1879 bis 1901	1902 bis 1923	1924 bis 1943
Relativzahl ...	42*	64	42	29*	59	53	40	37*	50

Tabelle 8. *Die Phasensprünge der Temperaturreihe und die langperiodige Sonnenfleckenschwankung.*

Langperiodiges Fleckenextrem	10 Jahre vor den Fleckenextremen	Phasensprünge der Temperaturreihe	Differenz
Max 1780	1770	1748	— 20
Mi 1820	1810	1823	+ 10
Max 1850	1840	1853	+ 10
Mi 1910	1900	1898	0
Max (1950)	(1940)	(1947)	(+ 10)

Das verschiedenartige Verhalten der europäischen Wintertemperaturen muß deshalb überraschen, weil es ganz im Gegensatz zu der von Köppen [4] festgestellten eindeutigen Beziehung zwischen der Sonnenfleckenperiode und den Temperaturen der Tropenregion steht. Es muß sich also wahrscheinlich um eine örtlich begrenzte Anomalie handeln, und ein Hinweis auf die Ursache wird durch die mit der 11jährigen Sonnenfleckenperiode

erfolgende Variation des europäischen Druckfeldes gegeben, die in Abb. 209 des in [5] zitierten Buches reproduziert ist. Es hat sich nämlich ergeben, daß der nordosteuropäische Raum im Mittel zur Zeit des Sonnenfleckenmaximums Druckerhöhung und zum Sonnenfleckenminimum Druckerniedrigung aufweist. Die positive Druckabweichung beginnt ein Jahr nach dem Fleckenminimum über dem westeuropäischen Raum und breitet sich dann nach Schottland und Island aus, von wo sie zur Zeit des Fleckenmaximums nach Nordosteuropa übertritt. Zweifellos sind die kalten Winter zur Zeit zunehmender langperiodiger Fleckentätigkeit auf die Ostlagen beschränkt, während man vermuten kann, daß die im Gefolge jedes langperiodigen Maximums eintretende Druckerhöhung im isländisch-grönländischen Raum und die damit verbundene zunehmende Vereisung dieses Gebietes auch kalte europäische Winter bei vorherrschender Nordlage zu erzeugen imstande ist. Eine eingehende Nachprüfung dieser Arbeitshypothese wäre wohl lohnend, und eine nähere Untersuchung der Änderungen der meteorologischen Elemente in den beiden verschiedenen Epochen dürfte sicher eine wesentlich genauere Kenntnis dieses komplizierten Mechanismus bringen.

Um schließlich noch den direkten Einfluß der Sonnenflecken auf die Temperatur eindeutig zu beweisen und klarzulegen, daß die verwickelten Beziehungen — wie z. B. in Mitteleuropa — nur örtliche Abwandlungen darstellen, sind in Tabelle 9 die von Köppen [8] auf Grund von je 30.000 bis 400.000 Beobachtungen berechneten Mitteltemperaturen für die ganze Erde für die Jahre 1812 bis 1910 als Funktion der Sonnenfleckenrelativzahl dargestellt. Daraus geht hervor, daß die Jahre geringster Fleckentätigkeit etwa 0,5° wärmer waren als jene mit einer Relativzahl über 100, und die Zwischenwerte verlaufen einigermaßen linear.

Tabelle 9. *Mittlere Abweichung der Temperatur der ganzen Erde als Funktion der Sonnenfleckenrelativzahlen 1813 bis 1910.*

Sonnenfleckenrelativzahl		Mittlere Temperaturabweichung	Anzahl der Jahre
Grenzwerte	Mittelwerte		
10	6	+ 0,22	16
10—20	14	+ 0,05	14
20—40	30	+ 0,03	18
40—60	49	— 0,09	20
60—80	68	— 0,07	17
80—100	93	— 0,10	6
>100	120	— 0,23	7

Abschließend kann man die Ergebnisse dahin zusammenfassen, daß die 11jährige Sonnenfleckenperiode in der Berliner Temperaturreihe mit überraschender Deutlichkeit hervortritt, und daß sie die einzige in ihr enthaltene periodische Erscheinung darstellt. Auch besteht zweifellos ein Zusammenhang mit der längerfristigen Sonnenfleckenperiode insofern, als die Jahre besonders starker Fleckenmaxima eine ebensolche Häufung

kalter Winter im Gefolge haben. Die Tatsache, daß wir gerade das absolut stärkste bisher beobachtete Sonnenfleckenmaximum erlebt haben, läßt einen Schluß in der Richtung zu, daß wir uns in nächster Zeit auf weitere strenge Winter gefaßt machen müssen, zugleich ist jetzt aber auch damit zu rechnen, daß die Phase bald wieder springt und daß die kalten Winter dann wieder mit dem Sonnenfleckenminimum gekoppelt auftreten werden.

Literaturverzeichnis.

1. G. Hellmann: Das Klima von Berlin. Veröff. Preuß. Meteor. Inst. 221, Abh. Bd. III, Nr. 6 (Berlin 1910).
2. l. c. [*1*] S. 61.
3. Bearbeitet vom Reichsamt für Wetterdienst, Band II (Berlin 1939).
4. W. Köppen: Lufttemperaturen, Sonnenflecken und Vulkanausbrüche. Meteorol. Z. **1914**, 305.
5. R. Scherhag: Neue Methoden der Wetteranalyse und Wetterprognose. Springer-Verlag (Berlin und Heidelberg, 1948).
6. Vgl. z. B. A. Hofmann: Atmosphärische Zirkulation über Mitteleuropa und Sonnenflecken. Meteorol. Rundschau **1**, 161 (1947). Ferner: F. Baur: Schwankungen der Solarkonstante. Z. Astrophysik **4**, 180 (1932).
7. C. Easton: Les hivers dans l'Europe occidentale (Leyde 1928).
8. l. c. S. 318, Tabelle 5.

551.594.11

Die halbtägige Welle des luftelektrischen Potentialgefälles.

Von

H. Israel, Buchau a. F.

Mit 2 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die Tagesgänge des luftelektrischen Potentialgefälles an Festlandstationen kann man in ihrem ortszeitgebundenen Anteil auffassen als einfache Schwingung mit einem Mindestwert in den frühen Morgen- und einem Maximalwert in den Nachmittagsstunden, über die eine im Laufe des Jahres schwankende und von Ort zu Ort verschiedene austauschbedingte Einsenkung während des Tages überlagert ist. Es läßt sich zeigen, daß die Tiefe dieser Einsenkung um so größer sein muß, je größer der mittlere Kern- und Großionengehalt des Meßortes ist. Damit finden die Unterschiede im Gang des Potentialgefälles benachbarter Stationen sowie die Änderungen dieses Charakters in Davos von 1909/10 zur Meßperiode 1923/26 eine qualitative Erklärung.

Summary. The diurnal variations of the potential gradient of atmospheric electricity at continental stations can be interpreted, in their share connected to local time, as a simple oscillation with a minimum in the early morning and a maximum in the afternoon; above this oscillation a depression is superposed during the day, caused by turbulence exchange, showing fluctuations in the course of the year and different from place to place. It can be shown that the amplitude of this depression must be so much greater the greater is the average content of nuclei and large ions of the place of measurements. Therewith the differences of the gradient's variation of neighbouring stations and the alteration of their character from 1909/10 at Davos to the period of measurements in 1923/26 find a qualitative explanation.

Résumé. On peut considérer la variation diurne du gradient de potentiel électrique de l'atmosphère dans les stations terrestres, du moins celle qui est liée au temps local, comme une oscillation simple avec un minimum tôt le matin et un maximum l'après-midi; une baisse diurne, variable suivant le moment de l'année et le lieu d'observation, vient s'y superposer. On peut montrer que cette baisse est d'autant plus accusée que la teneur moyenne en

noyaux et en gros ions est plus élevée. Cela permet d'expliquer les divergences de variation diurne du gradient électrique entre stations rapprochées, ainsi que la différence constatée dans les séries d'observations de 1909/10 et 1923/26 à Davos.

Die halbtägige Variation des luftelektrischen Potentialgefälles verläuft bekanntlich über den Ozeanen und arktischen Gebieten nach Weltzeit, über dem Festland nach Ortszeit. Der Weltzeitgang ist inzwischen durch seine enge Korrelation zum Weltgewittergeschehen befriedigend aufgeklärt; die ortszeitlichen Perioden dagegen harren noch der Deutung.

Wohl kann man heute mit Sicherheit sagen, daß das Zustandekommen der ortszeitlichen Gänge eng mit dem vertikalen atmosphärischen Massenaustausch und dessen täglicher Variation zusammenhängt. Dafür sprachen z. B. die mit dem Sonnenstand wandernden Termine des Morgen- und Abendmaximums im Gefällegang [*1*], die Parallelen zwischen Potentialgefälle- und Dampfdruck-Tagesgängen in ihrer jahreszeitlichen Veränderlichkeit u. a. m. [*2*], [*3*].

Indes zeigen diese Gefällegänge Eigenschaften, die durch den Austausch allein nicht zu erklären sind:

Ihr allgemeines Verhalten ist so, daß an den meisten Meßorten im Winter eine einfache tägliche Schwingung durchlaufen wird mit Minimum in den frühen Morgen- und Maximum in den späten Nachmittagsstunden; zum Sommer hin wird aus diesem Gang in zunehmendem Maße eine Doppelschwingung mit Mindestwerten in den frühen Morgen- und frühen Nachmittagsstunden und mit Maximalwerten am Vormittag und Spätnachmittag bzw. frühen Abend. An einigen Stationen ist die Doppelschwingung auch im Sommer kaum angedeutet bzw. gar nicht vorhanden, während wieder andere sie das ganze Jahr über zeigen.

Die Brownsche Auffassung [*3*] der Doppelschwingung als Überlagerung eines primär einfach-periodischen Tagesganges und einer austauschbedingten „Depression" der Werte am Tage erscheint zweifellos richtig; sie vermag jedoch keine Deutung dafür zu geben, daß diese Depression an nahe benachbarten Orten mit sicherlich gleichen Austauschbedingungen, ja sogar am gleichen Ort zu verschiedenen Zeiten [*1*] durchaus verschieden sein kann. Hier muß noch ein weiterer in den örtlichen Verhältnissen begründeter Einfluß bestehen, der zusammen mit dem Austausch die tatsächlich beobachteten Verhältnisse schafft.

Einen Hinweis gibt die Tatsache, daß die Doppelschwingung vor allem an den Meßorten auftritt, die in oder in der Nähe von größeren Städten liegen, während sie an Landstationen in Stadtferne und mit Erhebung vom Boden rasch verschwindet. Als typische Beispiele dafür seien genannt: Frankfurt/Main [*4*] und Bad Nauheim [*5*] sowie Paris, Stadt und Eifelturmspitze [*6*]. Man hat den Eindruck, daß das Auftreten der Doppelschwingung zum mittleren Gefälleniveau des Ortes in Korrelation steht und kommt damit zu der Vermutung, daß die austauschbedingte Depression um so ausgeprägter hervortritt, je höher der Gehalt der Luft an Kondensationskernen (und Großionen) ist.

Diese Vermutung läßt sich bestätigen, wie im weiteren gezeigt werden soll.

Die Feldstärke E $(= dv/dh)$ eines Ortes ist im stationären Gleichgewicht mit der Potentialdifferenz V zwischen Erdoberfläche und Ionosphäre, dem Widerstand R einer vertikalen Luftsäule von 1 cm² Querschnitt und Ionosphärenhöhe und dem spezifischen Widerstand am Meßort w (Reziprokwert der Leitfähigkeit am Ort) verknüpft durch die Beziehung

$$E = \frac{w}{R} \cdot V. \tag{1}$$

Isoliert man in bekannter Weise [7] die Größe V (Abtrennung des weltzeitlichen Gefälleanteils) durch Verhältnisbildung entsprechender Werte von E_f (Festlandwert) und E_o (Ozeanwert), so bleibt wegen der Konstanz des Verhältnisses $R_o/w_o = K$ über See in diesem Verhältniswert $a = E_f/E_o$ der rein ortszeitlich bedingte Anteil des Gefälles übrig in der Form

$$a = K \cdot \frac{w}{R}. \tag{2}$$

Differentiation nach der Zeit liefert

$$\frac{da}{dt} = \frac{K}{R} \cdot \frac{dw}{dt} - \frac{K \cdot w}{R^2} \cdot \frac{dR}{dt}. \tag{3}$$

Änderungen des Austausches haben veränderten Aerosolgehalt und damit andere Werte von w und R zur Folge. Wir wollen diese Änderungsbeträge abzuschätzen versuchen.

Wir gehen dazu aus von der bekannten Differentialgleichung für das Wiedervereinigungsgeschehen

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha \cdot n^2 - \beta \cdot n, \tag{4}$$

wo β für $\eta_1 \cdot N + \eta_2 \cdot N_o$ gesetzt ist. Setzt man $\eta_1 = \eta_2 = 10^{-5}$, $q = 10$ und $\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$, so liefert das Integral von (4) für den Gleichgewichtswert von n in Abhängigkeit von der Gesamtzahl Z von Großionen und ungeladenen Kernen den Ausdruck [8]:

$$\frac{dn}{dZ} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{\eta^2}{\alpha^2} \cdot Z}{\sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{\eta^2}{\alpha^2} \cdot Z^2 + \frac{q}{\alpha}}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\eta}{\alpha}, \tag{5}$$

der uns w und R bzw. dw/dt und dR/dt zu berechnen gestattet.

Betrachten wir zunächst die Änderung von R. Man kann sich leicht überzeugen, daß dieser Wert durch das Austauschgeschehen nicht wesentlich beeinflußt wird. Schließen wir seitliche Advektion von Kernen und Großionen aus, so besteht die Austauschwirkung darin, daß ein bestimmter Z-Gehalt, der nach irgendeiner Funktion mit der Höhe abklingt, über einen größeren Höhenbereich verteilt wird. Da dies im wesentlichen in den untersten Atmosphärenschichten vor sich geht, ist davon keine große Änderung von R zu erwarten. In der Tat zeigt eine Durchrechnung, daß bei Ausbreitung eines mit 150 m Halbwertshöhe exponentiell abnehmenden Z-Gehaltes über die doppelte Höhe (Halbwertshöhe 300 m)

R eine Verkleinerung um 1,4% bzw. 0,6% erfährt, obwohl dabei der Z-Gehalt am Boden von 10.000 auf 5000 bzw. von 1000 auf 500 sinkt. Da sich, wie wir gleich im einzelnen sehen werden, w bei solchen Schwankungen von Z ganz erheblich ändert, kann darnach die Änderung von R vernachlässigt und der Austauscheinfluß auf das Potentialgefälle gemäß (3) in der einfacheren Form

$$da/dt = C \cdot dw/dt \qquad (3a)$$

behandelt werden.

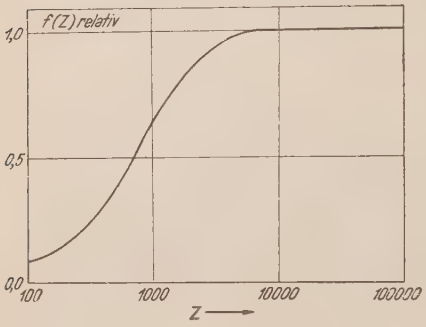


Abb. 1. Prozentuale Änderung des spezifischen Luftwiderstandes w bei gleichem prozentualem Änderungsbetrag des Kern- und Großionengehaltes Z für Z-Werte zwischen 100 und 100.000 (Ordinatenmaß) relativ.

Setzt man zur Vereinfachung $n^+ = n^-$ und $k^+ = k^-$, so ist w als Reziprokwert der Leitfähigkeit gegeben durch

$$w = \frac{1}{2 \cdot \varepsilon \cdot k \cdot n\,(Z)}. \qquad (6)$$

Erfährt jetzt Z durch Austauschwirkung eine Änderung, so führt dies zu einem anderen Gleichgewichtswert $n\,(Z)$ und damit einem entsprechend veränderten Widerstandswert w. Aus (6) folgt

$$\frac{dw}{dZ} = \frac{dw}{dn} \cdot \frac{dn}{dZ} \qquad (7)$$

und weiter unter Benutzung von (5) der einer perzentuellen Änderung dZ/Z entsprechende Änderungsbetrag dw/w. In Abb. 1 ist der Verlauf dieser Funktion in relativem Maß für Z-Werte zwischen 100 und 100.000 dargestellt.

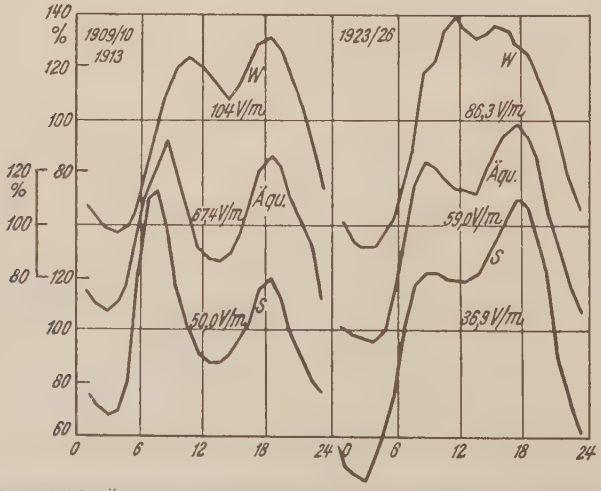


Abb. 2. Jahreszeitliche Änderung des Tagesganges des Potentialgefälles in Davos während der Meßperioden 1909/10 und 1913 und 1923/26. Prozentuale Darstellung.

Die Berechnung zeigt, daß der prozentuelle Änderungsbetrag von w mit zunehmenden Z-Werten rasch ansteigt, um für $Z = 10.000$ einem konstanten Endwert zuzustreben.

Die Auswirkung dessen auf den Tagesgang des Potentialgefälles liegt auf der Hand:

Je höher der mittlere Großionen- und Kerngehalt eines Ortes ist, um so stärker muß sich die austauschbedingte Aerosoländerung auf das Potentialgefälle auswirken!

Damit ist für die eingangs erwähnten Eigenarten der Tagesvariationen des luftelektrischen Potentialgefälles eine qualitative Erklärung gefunden: In kern- und großionenarmer Landluft *muß* die Mittagsdepression bei gleichem Austausch geringer sein als in der kern- und großionenreichen Atmosphäre der Städte! Das Zurücktreten der Depression mit zunehmender Höhe dürfte zum Teil in der gleichen Weise zu erklären sein, zum Teil auch in abgeschwächter Austauschwirkung seinen Grund haben.

Zum Schluß sei erwähnt, daß auf diese Weise auch die in Davos beobachtete Änderung der Gefälletagesgänge von doppelperiodischem Charakter während des ganzen Jahres in den Jahren 1909/10 und 1913 [*9*] zu winterlich einfachperiodischem und nur noch sommerlich doppelperiodischem Gang bei wesentlicher Verminderung der Depressionstiefe in den Jahren 1923/26 [*10*] (Abb. 2), für den schon a. a. O. eine Aerosolveränderung als Grund vermutet wurde [*1*], ihre plausible Deutung erfährt: Der Rückgang der Ofenheizung zugunsten elektrischer Heizung dürfte eine merkliche Verminderung des mittleren Kerngehaltes zur Folge gehabt haben; damit tritt die Austauschwirkung auf das Gefälle entsprechend zurück.

Literaturverzeichnis.

1. H. Israel: Meteorol. Rundschau **1**, 200—204 (1948).
2. H. Israel: Wiss. Abh. d. Reichsamtes für Wetterdienst V, Nr. 12. Berlin 1939.
3. J. G. Brown: Terr. Magn. **40**, 413—424 (1935).
4. H. Kuhn: Z. Geophysik **9**, 238—252 (1933).
5. H. Israel, Das Klima von Bad Nauheim. Verl. Th. Steinkopf, Dresden 1937.
6. A. B. Chauveau: Recherches sur l'électricité atmosphérique I (Paris 1899); II (Paris 1900).
7. F. J. Scrase: Geophys. Mem. Royal Met. Soc. London VII, Nr. 60 (1934).
8. H. Israel: Meteorol. Rundschau (im Druck).
9. C. Dorno: Studie über Licht und Luft im Hochgebirge. Braunschweig 1911.
10. F. Lindholm und M. Bider: Meteorolog. Z. **44**, 401—406 (1927).

551.515.83 : 551.525.2

(Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien.)

Die Modifikation einer Luftmasse durch die nächtliche Abkühlung der Erdoberfläche.

Von

H. Reuter.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Im Anschluß an eine frühere Untersuchung über die Theorie der nächtlichen Abkühlung der bodennahen Luftschicht (Reuter [*3*]) wird die Modifikation einer Luftmasse durch Austausch und Eigenstrahlung beim nächtlichen Abkühlungsprozeß behandelt. Gegenüber anderen derartigen Untersuchungen (Schwerdtfeger [*1*] und Taylor [*2*]) tritt im Falle der nächtlichen Abkühlung der Erdoberfläche eine zeitlich veränderliche Temperatur der Unterlage auf. Im Abschnitt I wird mit Hilfe der bereits in meiner früheren Arbeit abgeleiteten Formeln bei Vernachlässigung der Eigenstrahlung der Luft für verschiedene als konstant angenommene Austauschwerte der Aufbau einer ursprünglich adiabatisch geschichteten Atmosphäre nach einer 6- bzw. 12stündigen nächtlichen Abkühlung berechnet (siehe Abb. 1 bis 3). Man erkennt vor allem aus diesen Abbildungen gut die Ausbildung der Bodeninversion. In Abschnitt II wird dann versucht, neben der Modifikation der Luft durch Austauschvorgänge auch die Eigenstrahlung zu berücksichtigen. Für bodennahe Luftschichten, bei denen vorausgesetzt wird, daß sie nur mit der Erdoberfläche in Strahlungsaustausch stünden, gelingt die Aufstellung einer entsprechenden Differentialgleichung mit Hilfe einer von Panofsky [*6*] aus dem Strahlungsdiagramm von Elsasser abgeleiteten Beziehung. Eine allgemeine Integration der Differentialgleichung durch Quadraturen erscheint undurchführbar, so daß versucht wird, nur zwei Sonderfälle zu behandeln. Im ersten Sonderfall, nämlich dem alleiniger Abkühlung der Luft durch Eigenstrahlung, ergibt sich eine Lösung, die in Abb. 4 veranschaulicht ist. Im zweiten Fall, nämlich dem größerer Austauschbeträge, kann gezeigt werden, daß für die bodennahen Schichten (2 m Höhe) die Abkühlung durch Eigenstrahlung gegenüber der durch Austausch bis zu Beträgen von $A = 1$ g pro cm und sek herunter praktisch vernachlässigt werden kann.

Summary. In addition to a former paper of mine on the theory of nocturnal cooling of atmospheric layers near the ground (Reuter [3]), the modification of air masses through eddy conductivity and radiative cooling during the night is being dealt with. In comparison with other studies in this line (Schwerdtfeger [1] and Taylor [2]), in case of nocturnal cooling of the surface of earth the temperature of the ground varies in the progress of time. Using the formula derived in my former paper, in chapter I the modification of an air mass through nocturnal cooling of the ground after 6 resp. 12 hours is calculated. The radiative cooling of the air is hereby neglected and the eddy coefficient is assumed as being constant. Figures 1 to 3 show the result of this calculation under the assumption that the atmosphere at the beginning of the cooling process has an adiabatic lapse rate. By these figures especially the formation of the ground inversion can be recognized. In chapter II attempt is made to calculate the modifications of the atmosphere, both by eddy conductivity and by radiative cooling. As regards atmospheric layers near the ground, the setting up of a differential equation can be obtained under the condition that the atmospheric layers are in radiative connection with the surface of earth only, but not between each other. In the differential equation a relation is used obtained by Panofsky [6] from the atmospheric radiation chart of Elsasser.

The general integration of this differential equation meets great difficulties. Therefore only the solution of special cases is attempted. In the first case, neglecting the eddy conductivity, only the radiative cooling of the atmosphere is dealt with. See Figure 4. In the second case, where the eddy coefficient is assumed to be larger than 1 g per cm and sec, the radiative cooling of atmospheric layers near the ground (about 2 m high) can be practically neglected.

Résumé. Faisant suite à une étude antérieure sur la refroidissement nocturne de la couche d'air voisine du sol (Reuter [3]), l'auteur examine la transformation d'une masse d'air par échange turbulent et rayonnement lors du refroidissement nocturne. A la différence d'autres recherches analogues (Schwerdtfeger [1] & Taylor [2]), la température du sol n'est ici pas constante. La première partie est consacrée au calcul de la variation de température d'une atmosphère à gradient vertical primitivement adiabatique, au bout de 6 ou 12 h. de refroidissement nocturne; on se sert pour cela des formules établies dans un précédent travail, en négligeant le rayonnement propre de l'air et en adoptant une valeur fixe de l'échange turbulent (v. fig. 1 à 3). Les figures montrent nettement la formation d'une inversion de température au voisinage du sol. Dans la deuxième partie, l'auteur essaye de tenir compte en outre du rayonnement propre de l'atmosphère. En ce qui concerne les couches d'air basses dont on suppose qu'elles n'échangent de l'énergie rayonnante qu'avec le sol, il est possible d'établir une équation différentielle à l'aide d'une relation que Panovsky [6] a tirée du diagramme de rayonnement de Elsasser. Toutefois l'intégration de cette équation n'est pas possible, de sorte qu'il faut se borner à deux cas particuliers. Dans le premier cas, où seul le rayonnement entre en jeu, une solution apparaît qu'illustre la figure 4. Dans le second cas où l'échange turbulent est prépondérant, on peut montrer que pour les couches basses (2 m. de hauteur) la perte de chaleur par rayonnement est pratiquement négligeable vis à vis de la perte par échange turbulent jusqu'à la valeur minimum de $A = 1$ g. par cm. par sec. pour ce dernier.

Eine Luftmasse wird bekanntlich durch die Temperatur der Unterlage, über der sie lagert bzw. über die sie sich bewegt, weitgehend verändert, wobei einerseits die vertikalen Austauschvorgänge, anderseits die Modifikation der Luft durch Eigenstrahlung eine mehr oder weniger große Rolle spielen. Sieht man zunächst von der Eigenstrahlung der Luft ab und betrachtet nur die Wirkung des Austausches (die molekulare Wärmeleitung ist gegenüber dem Austausch praktisch zu vernachlässigen), so können mehrere in der Natur realisierte Fälle ins Auge gefaßt werden. So wurde unter anderem von Schwerdtfeger [*1*] der Fall behandelt, wie sich eine kalte Luftmasse durch eine wärmere Unterlage konstanter Temperatur im Laufe der Zeit verändert, während Taylor [*2*] den umgekehrten Vorgang, nämlich die Abkühlung warmer Luft durch eine kältere Unterlage (in diesem Fall die Meeresoberfläche) infolge vertikalen Austausches berechnet hat. Im Prinzip derselbe Vorgang findet auch statt, wenn die nächtliche Abkühlung der Erdoberfläche modifizierend auf die Luftmasse einwirkt, wobei allerdings in diesem Falle die Temperatur der Unterlage nicht als konstant, sondern als Funktion der Zeit betrachtet werden muß. Für den Fall bloßer Austauschvorgänge zwischen Erdoberfläche und Luft habe ich bereits in einer früheren Arbeit [*3*] die notwendigen Formeln abgeleitet. Zur Lösung des Problems wurden dabei gewisse mit experimentellen Untersuchungen jedoch in Einklang zu bringende Vereinfachungen angenommen. Hier sei in Kürze zunächst das wichtigste Ergebnis dieser Untersuchung angeführt.

I. Modifikation einer Luftmasse durch die nächtliche Abkühlung der Erdoberfläche infolge vertikalen Austausches bei konstanter effektiver Ausstrahlung.

Wir setzen folgendes voraus: In der Luft und in den obersten am nächtlichen Abkühlungsprozeß mitbeteiligten Erdschichten seien nur vertikale Wärmetransporte vorhanden, wobei diese im Erdinnern entsprechend der Bodenbeschaffenheit mit einem einheitlichen Wärmeleitvermögen vor sich gehen sollen, während in der Atmosphäre ein konstanter vertikaler Austauschkoeffizient vorausgesetzt wird. Wir rechnen also in den obersten Erdschichten mit einer konstanten Dichte ϱ_B, einer konstanten spezifischen Wärme c_B und einer ebenfalls konstanten Wärmeleitfähigkeit k_B. Für die Atmosphäre wird ein konstanter Austauschkoeffizient A, eine konstante Dichte ϱ und die spezifische Wärme c_p bei konstantem Druck angesetzt. Schließlich setzen wir noch einen im Laufe der Nacht konstanten Wärmeverlust der Erdoberfläche (bei Nichtberücksichtigung der Verdunstung also eine konstante effektive Ausstrahlung) voraus. Bezüglich der näheren Einzelheiten und der Berechtigung dieser weitgehenden Vereinfachungen muß auf die erwähnte Arbeit verwiesen werden. Bezeichnen wir diese effektive Ausstrahlung mit R und sei zu Beginn des Abkühlungsprozesses in der Luft ein linearer

Temperaturgradient γ vorhanden, so liegt dem Problem folgender Ansatz zugrunde:

Erdboden: $z < 0$ $$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{k_B}{\varrho_B c_B} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}.$$

Anfangstemperaturverteilung: $t = 0,\ T_1 = C = \text{const.}$ (1)

Luft: $z > 0$ $$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{A}{\varrho} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}.$$

Anfangstemperaturverteilung: $t = 0,\ T_2 = C - \gamma z.$ (2)

Ferner die Randbedingungen an der Erdoberfläche:

für alle Zeiten $$(T_1)_{z=0} = (T_2)_{z=0}$$ (3)

und

für alle Zeiten $$R + k_B \left(\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)_{z=0} - c_p A \left(\frac{\partial T_2}{\partial z}\right)_{z=0} = 0.$$ (4)

Dabei ist unter T die aktuelle Temperatur, unter t die Zeit und unter z die im Erdboden negativ, in der Luft positiv zu zählende Vertikalkoordinate zu verstehen. Daß in Gl. (2) die aktuelle und *nicht* die potentielle Temperatur aufscheint, ist, wie ich ebenfalls in der erwähnten Veröffentlichung auseinandergesetzt habe, bei der Annahme eines konstanten Austauschkoeffizienten zulässig, da die zweiten partiellen Ableitungen nach z für die aktuelle und die potentielle Temperatur dieselben sind. Die Lösung des Gleichungssystems (1) und (2) mit den Randbedingungen (3) und (4) ergibt sich nach [3] zu:

$$T_1 = C + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} a_1 \sqrt{t}\, e^{-\frac{z^2}{4 a_1^2 t}} - \frac{C_1}{2} (-z) \left[1 - \Theta\left(\frac{-z}{2 a_1 \sqrt{t}}\right)\right]$$ (5)

$$T_2 = C + (C_2 - 2\gamma)\, a_2 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4 a_2^2 t}} - \frac{C_2}{2} z \left[1 - \Theta\left(\frac{z}{2 a_2 \sqrt{t}}\right)\right] - \gamma z \Theta\left(\frac{z}{2 a_2 \sqrt{t}}\right)$$ (5 a)

Dabei wurde zur Abkürzung geschrieben:

$$a_1^2 = \frac{k_B}{\varrho_B c_B}, \qquad a_2^2 = \frac{A}{\varrho}.$$ (6)

Die Funktion $\Theta(u)$ bedeutet das Fehlerintegral von Gauss

$$\Theta(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\beta^2} d\beta.$$ (7)

Für die Konstanten C_1 und C_2 ergibt sich aus den Nebenbedingungen (3) und (4)

$$C_1 = -\frac{2}{a_1} \frac{R + \gamma c_p A}{\sqrt{k_B \varrho_B c_B} + c_p \sqrt{A \varrho}},$$ (8)

$$C_2 - 2\gamma = -\frac{2}{a_2} \frac{R + \gamma c_p A}{\sqrt{k_B \varrho_B c_B} + c_p \sqrt{A \varrho}}.$$ (9)

Uns interessiert hier in erster Linie die Lösung für T_2, also die Formel (5a), d. h. die Verhältnisse in der Luft. Nimmt man als Wärmeverlust der Erdoberfläche R einen Durchschnittswert der effektiven Ausstrahlung, nämlich $R = 0{,}1$ cal/cm² min als Grundlage und hat die Atmosphäre zu Beginn des Abkühlungsprozesses einen adiabatischen Temperaturgradienten, also $\gamma = 1$ pro 100 m, so ergibt sich nach 6- bzw. 12stündiger Abkühlung der Erdoberfläche (unter der Voraussetzung feuchten Sandbodens entsprechend den Bodenkonstanten nach HANN-SÜRING, Lehrb. d. Met., 5. Aufl., S. 104) für verschiedene Austauschwerte ein Temperaturverlauf, wie er in Abb. 1 bis 3 veranschaulicht ist. Für die Atmosphäre wurde dabei $c_p = 0{,}2405$ cal pro g und

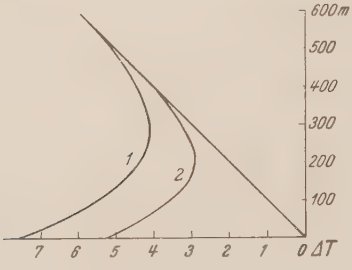


Abb. 1.

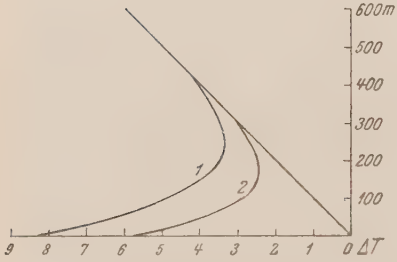


Abb. 2.

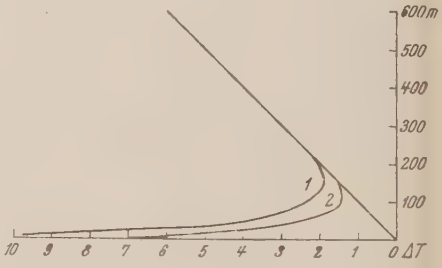


Abb. 3.

Abb. 1 bis 3: Modifikation einer ursprünglich adiabatisch geschichteten Atmosphäre nach 6- bzw. 12-stündiger Abkühlung der Erdoberfläche (feuchter Sandboden) bei konstanter effektiver Ausstrahlung für verschiedene Austauschwerte. Kurve (1) 12stündige, Kurve (2) 6stündige Modifikation. Austauschwerte: Abb. 1: $A = 10$, Abb. 2: $A = 5$, Abb. 3: $A = 1$ g/cm sec.

Grad und $\varrho = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ g pro cm³ gesetzt. Man erkennt aus den Abbildungen gut die Ausbildung der Bodeninversion. In der bereits mehrfach angeführten Arbeit habe ich auch eine Formel zur direkten Berechnung der Höhe und des Betrages der Bodeninversion abgeleitet, ohne daß ich jedoch dort den ganzen Temperaturverlauf gezeigt habe. In einer ebendort gegebenen Diskussion konnte ich ferner zeigen, daß im allgemeinen der so berechnete Temperaturverlauf mit der Erfahrung in Einklang zu bringen ist.

Die Abkühlung der Erdoberfläche erhält man aus (5) oder (5a), indem man $z = 0$ setzt. Da C die Anfangstemperatur am Boden darstellt, können wir für den Betrag der Abkühlung am Boden schreiben:

$$\Delta T_0 = C - T_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{R + \gamma c_p A}{\sqrt{k_B \varrho_B c_B} + c_p \sqrt{A \varrho}} \sqrt{t}. \qquad (10)$$

Die Formel (10) geht für Sonderfälle in eine von Brunt [7] ($A = 0$) bzw. von Philipps [8] ($A \neq 0$, $\gamma = 0$) abgeleitete über.

Das Ergebnis der hier durchgeführten Rechnung hängt wesentlich von der Annahme R = konstant ab. Wie neuerdings Groen [9] betont hat, ist dies jedoch, soweit wir unter R die effektive Ausstrahlung verstehen, zumindestens bei längerer Abkühlungsdauer keineswegs berechtigt. Groen meint, eine Konstanz von R sei nur gewährleistet, wenn sich die zu Beginn des Abkühlungsprozesses in der Atmosphäre herrschende Temperaturverteilung im Laufe der Nacht gleichsam zu sich selbst parallel verschiebt. Kommt es jedoch zur Ausbildung einer Bodeninversion, so ändern sich die Strahlungsverhältnisse der Atmosphäre derart, daß die effektive Ausstrahlung der Erdoberfläche keineswegs mehr als konstant angenommen werden kann. Groen stützt diese Behauptung durch Angabe einer Berechnung von R aus dem Strahlungsdiagramm von Möller [5] zu Beginn und Ende einer Strahlungsnacht, wobei er eine Abnahme der effektiven Ausstrahlung um mehr als 40% feststellen konnte. Auf unsere Rechnung angewendet, würde das besagen, daß die mit Hilfe eines konstanten R durchgeführte Berechnung der sich ausbildenden Bodeninversion in sich widerspruchsvoll ist, weil gerade die Inversion, wie wir sie aus Abb. 1 bis 3 erkennen können, zu einer Verminderung von R Anlaß gibt. Indessen können diese Bedenken einigermaßen zerstreut werden. Zunächst ist es bei den komplizierten Strahlungsvorgängen in der Atmosphäre im allgemeinen nicht richtig, daß sich die Temperaturverteilung, die zu Anfang herrscht, parallel verschieben müßte, damit die effektive Ausstrahlung der Erdoberfläche konstant bleibt. Wie Linke und Möller ([10] Abb. 204 b, S. 688) zeigen, ist die Herkunft der atmosphärischen Gegenstrahlung, d. h. die mittlere Höhe, aus der die bis zum Erdboden gelangende Gegenstrahlung kommt, von der Wellenlänge stark abhängig, so daß bei einer Abkühlung der Atmosphäre unter Umständen ganz andere Schichten für die Gegenstrahlung verantwortlich werden. Jedenfalls ist der Einfluß einer sich bildenden Inversion auf die Gegenstrahlung nicht unmittelbar zu erkennen, sondern dies muß in jedem einzelnen Fall graphisch aus dem Strahlungsdiagramm ermittelt werden, wobei die Temperatur- und Feuchteverteilung in jedem Zeitpunkt bekannt sein muß. Allerdings ist eine Verminderung von R durch die Inversionsbildung zu erwarten. Die Voraussetzung einer konstanten effektiven Ausstrahlung kann aber außerdem noch durch direkte Messungen der nächtlichen Strahlungsbilanz überprüft werden. So konnte Sauberer [11] nachweisen, daß die im allgemeinen nur eine sehr geringe Abnahme der effektiven Ausstrahlung in klaren Nächten erfolgte, meist nicht mehr als 10%, und daß in vielen Fällen auch ein Konstanz von R zu beobachten war. Natürlich ist bei allen diesen Überlegungen vorausgesetzt, daß nicht durch Advektion Luftmassenänderungen eintreten oder daß es zur Wolken- bzw. Nebelbildung kommt, was selbstverständlich eine sprunghafte Änderung der Gegenstrahlung und damit der effektiven Ausstrahlung zur Folge hätte. Schließlich führt, wie die obenstehenden Rechnungen zeigen,

die Annahme R = konstant für die Bodenabkühlung auf ein Gesetz der Art von (10), also auf eine Proportionalität mit der Wurzel aus der Zeit, und eine solche Zeitabhängigkeit hat sich, wie Brunt [7] gezeigt hat, in der Praxis weitgehend bewährt.

II. Mitberücksichtigung der Eigenstrahlung der Luft gegenüber der Erdoberfläche.

Wie wir eingangs erwähnt haben, tritt zu dem turbulenten Wärmeaustausch Luft—Erdoberfläche, dessen alleinige Berücksichtigung zu den Formeln des Abschnittes I führt, noch der Strahlungsaustausch Luft—Erdboden. Die Berücksichtigung dieser weiteren Modifikation der Luft beim nächtlichen Abkühlungsprozeß (sie wird besonders bei geringen turbulenten Austauschgrößen in Frage kommen, da dann größere Temperaturdifferenzen Luft—Erdboden auftreten) verursacht aus mehreren Gründen erhebliche Schwierigkeiten. Für einen gegebenen Zustand der Atmosphäre und eine gegebene Erdbodentemperatur kann man zwar mit Hilfe eines Strahlungsdiagramms, etwa des von Elsasser [4] oder von Möller [5], die Temperaturänderung pro Zeiteinheit für jede beliebige Schicht berechnen. Aber das genügt für uns nicht, da sich ja auch infolge der Eigenstrahlung ständig die Temperaturverteilung ändert, also nur eine entsprechende Differentialgleichung den Vorgang regeln kann. Um nun unser Problem ansetzen zu können, setzen wir wie im Abschnitt I voraus, daß — wie immer sich auch die Strahlungsvorgänge innerhalb der Atmosphäre gestalten mögen — in erster Näherung die effektive Ausstrahlung der Erdoberfläche einen konstanten Betrag habe. Daß dies eine einigermaßen berechtigte Annahme ist, haben wir in Abschnitt I ausführlich gezeigt. Ist aber diese Annahme getroffen, so haben wir für die Temperaturabnahme der Erdoberfläche im Laufe der Nacht ein Gesetz nach Formel (10) anzusetzen, also eine Proportionalität der Abkühlung mit der Wurzel aus der Zeit. Wir schreiben dazu (10) in der Form:

$$T_0 = T_a - b \cdot \sqrt{t}. \tag{10a}$$

Ein solches Gesetz wurde auch von Brunt [7] abgeleitet und als weitgehend mit der Erfahrung in Einklang stehend gefunden. (Die Bruntsche Formel ergibt sich aus (10) für $A = 0$.) Mit (10a) können wir nun das allgemeine Problem der Modifikation einer Luftmasse durch die nächtliche Abkühlung der Erdoberfläche infolge Austausch und Eigenstrahlung durch folgenden Ansatz festlegen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{A}{\varrho} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + f(z, t, T), \tag{11}$$

mit

$$t = 0 \qquad T = T_L - \gamma z,$$

$$z = 0 \qquad T_0 = T_a - b\sqrt{t}.$$

Dabei würde die zunächst noch unbekannte Funktion $f(z, t, T)$ die Temperaturänderung infolge Eigenstrahlung bedeuten. Wir haben

ferner in (11) die Temperatur der Luft und des Erdbodens an der gemeinsamen Berührungsfläche zu Beginn des Abkühlungsprozesses nicht gleich angesetzt, also $T_L \neq T_a$, was sich für spätere Überlegungen als vorteilhaft erweisen wird.

Die Funktion $f(z, t, T)$ ist im allgemeinen Fall analytisch nicht angebbar, sondern kann nur, wie eben auseinandergesetzt wurde, für eine gegebene Temperatur- und Feuchteverteilung aus dem Strahlungsdiagramm abgelesen werden. Wir müssen daher versuchen, eine brauchbare Näherung zu finden. Wir beschränken uns bei den weiteren Überlegungen auf Luftschichten in Bodennähe, die naturgemäß am meisten am Strahlungsaustausch Luft—Erdboden beteiligt sind. Wir nehmen nun als in erster Näherung gültig an, daß diese Luftschichten *nur* im Strahlungsaustausch mit der Erdbodenoberfläche und nicht auch untereinander stehen. In diesem Fall wird es möglich sein, die Funktion $f(z, t, T)$ in der Form

$$f(z, t, T) = \sigma(z) \cdot (T - T_0), \tag{12}$$

mit

$$T_0 = T_B - b\sqrt{t},$$

anzusetzen, da in erster Näherung für jede Höhe eine Proportionalität mit der jeweiligen Temperaturdifferenz Luftschicht—Erdboden angenommen werden kann. Es handelt sich nun noch die Funktion $\sigma(z)$ zu bestimmen. Dies gelingt mit Hilfe des Strahlungsdiagramms von Elsasser [*4*]. Da wir nur einen Strahlungsaustausch Luft—Erdboden und nicht auch den der einzelnen Schichten untereinander zulassen wollen, haben wir mit Hilfe des Strahlungsdiagramms nur die Fälle zu untersuchen, welche Temperaturänderung eine isotherme Luft der Temperatur T in der Höhe z bei einer vorgegebenen Temperaturdifferenz zum Erdboden erfährt. Diesen Fall hat aber bereits Panofsky [*6*] untersucht. Er findet für

$$\sigma(z) = \frac{h}{\sqrt{z}}, \tag{13}$$

mit

$$h = -2{,}2\sqrt{q/\varrho},$$

wenn q die spezifische Feuchte der Luft, ϱ die Dichte bedeutet und als Zeiteinheit die Stunde gewählt und z in cm gemessen wird. Die Gültigkeit der Formel (13) beschränkt sich nach Panofsky auf Höhen von 10 cm bis 250 cm. In größeren Höhen ist ein anderes Gesetz gültig. Mit (12) und (13) wird jetzt unsere Differentialgleichung (11)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{A}{\varrho}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{h}{\sqrt{z}}\left(T - T_a + b\sqrt{t}\right), \tag{14}$$

mit

$$t = 0 \qquad T = T_L - \gamma z,$$

$$z = 0 \qquad T_0 = T_a - b\sqrt{t}.$$

Eine Lösung der Differentialgleichung (14) bereitet im allgemeinen Fall erhebliche Schwierigkeiten. Mit Hilfe von Quadraturen ist sie wohl

nicht auf bekannte Funktionen zurückzuführen. Wir können aber mit Sonderfällen dem Problem näherkommen. So wollen wir zuerst voraussetzen, der Austausch A sei sehr gering, und untersuchen den Fall, wo nur die Strahlungsabkühlung allein wirksam ist.

Da wir uns auf die bodennahen Luftschichten beschränken, können wir bei den Nebenbedingungen in (14) $\gamma = 0$ setzen, so daß wir zu Beginn des Prozesses eine einheitliche Lufttemperatur T_L voraussetzen, die aber von der anfänglichen Erdbodentemperatur T_a verschieden sein kann. Für den Sonderfall alleiniger Strahlungsabkühlung ergibt sich sofort aus (14), wenn wir für die Rechnung wieder $\sigma(z) = h/\sqrt{z}$ schreiben:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\sigma(z)\left(T - T_a + b\sqrt{t}\right), \tag{15}$$

mit

$$t = 0 \qquad T = T_L,$$

$$z = 0 \qquad T_0 = T_a - b\sqrt{t}.$$

Zur Integration schreiben wir (15) bei festgehaltenem z in der Form:

$$\frac{dT}{dt} + \sigma(z)\,T = \sigma(z)\left(T_a - b\sqrt{t}\right), \tag{15 a}$$

was eine lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung darstellt. Die Lösung lautet:

$$T = e^{-\sigma t}\left\{\sigma\int\left[e^{\sigma t}\left(T_a - b\sqrt{t}\right)\right]dt + \varphi(z)\right\}, \tag{16}$$

wo $\varphi(z)$ eine durch die Anfangsbedingung zu bestimmende Funktion von z ist. Das Integral in der geschlungenen Klammer errechnet sich nach leichten Umformungen zu

$$\frac{1}{\sigma}\,T_a\,e^{\sigma t} - \frac{b}{\sigma}\,e^{\sigma t}\sqrt{t} + b\,\sigma^{-3/2}\int_0^{\sqrt{\sigma t}} e^{\beta^2}\,d\beta,$$

so daß die Lösung von (15) lautet:

$$T = T_a - b\sqrt{t} + \frac{b}{\sqrt{\sigma}}\,e^{-\sigma t}\int_0^{\sqrt{\sigma t}} e^{\beta^2}\,d\beta + \varphi(z)\,e^{-\sigma t}. \tag{17}$$

Aus der Anfangsbedingung $t = 0$, $T = T_L$ ergibt sich für $\varphi(z) = T_L - T_a$. Setzen wir nun wieder für $\sigma(z)$ nach (13) den Wert $h/\sqrt{z}$ ein und schreiben zur Abkürzung

$$M \equiv \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\,e^{-\sigma t}\int_0^{\sqrt{\sigma t}} e^{\beta^2}\,d\beta, \tag{18}$$

so können wir (17) schließlich in der Form

$$T = T_a - b\left(\sqrt{t} - M\right) + (T_L - T_a)\,e^{-ht/\sqrt{z}} \tag{19}$$

schreiben. Man kann sich jetzt nachträglich leicht überzeugen, daß (19) tatsächlich die Lösung von (15) darstellt und insbesondere auch

der Randbedingung für $z = 0$ genügt, da der Ausdruck (18) mit $\sigma = h/\sqrt{z}$ für $z \to 0$ ebenfalls gegen Null geht. Da die Abkühlung am Boden $\Delta T_0 = b\sqrt{t}$ ist, so können wir (19) auch in der Form schreiben:

$$\Delta T_z = T_L - T = \Delta T_0 \left(1 - M/\sqrt{t}\right) + (T_L - T_a)\left(1 - e^{-h\,t/\sqrt{z}}\right). \quad (20)$$

Der Ausdruck $1 - M/\sqrt{t}$, der unter der Annahme gleicher Anfangstemperatur für die Luft und den Erdboden den prozentualen Anteil der Abkühlung in der Höhe z gegenüber der Bodenabkühlung bedeutet, ist in Tabelle 1 für $z = 2$ m in Abhängigkeit von der Zeit berechnet. Dabei wurden die Werte für das in M vorkommende Integral den Funktionstafeln von Jahnke und Emde (3. Aufl., 1938, S. 32) entnommen. Die spezifische Feuchte q wurde gleich 0,005 gesetzt und für die Dichte $\varrho = 0{,}0013$ g/cm³ angenommen.

Tabelle 1. *Abkühlung der Luft infolge Eigenstrahlung in 2 m Höhe in Prozenten der Erdbodenabkühlung für verschiedene Zeiträume.*

Stunden	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Abkühlung in 2 m Höhe in % der Bodenabkühlg.	18	32	43	51	59	65	70	73	76	79	81	83

Wie die Tabelle 1 zeigt, ist für geringere Zeitspannen die Abkühlung der Luft in 2 m Höhe durch Eigenstrahlung wesentlich geringer als diejenige am Boden und liegt bis zu 4 Stunden unter 50% der Bodenabkühlung. Im weiteren Verlauf ändert sich allerdings das Bild und nach 12 Stunden macht sie bereits 83% des Wertes an der Erdoberfläche aus. Dabei wurde allerdings vorausgesetzt, daß zu Beginn des Prozesses die Erdbodentemperatur und die Lufttemperatur dieselben sind. Nehmen wir dies nicht an, so tritt das zweite Glied auf der rechten Seite der Formel (20) in Erscheinung. Wir wollen nun voraussetzen, daß der Erdboden zu Beginn des Abkühlungsvorganges gegenüber der Luft überhitzt sei. Das besagt, daß in unserer Schreibweise die Differenz $T_L - T_a$ negativ anzusetzen wäre. Um einen konkreten Fall zu betrachten, nehmen wir weiterhin an, daß die Größe b in (10a) den Betrag 2,8° C habe, was nach (10) bei feuchtem Sandboden und einer effektiven Ausstrahlung von 0,1 cal pro qcm und Minute einem Austausch von $A = 1$ g pro cm und Sekunde entsprechen würde. Die Abb. 4 zeigt die Abkühlung am Boden und in 2 m Höhe als Funktion der Zeit unter den so getroffenen Annahmen für respektive $T_L - T_a = 0, -2, -3°$.

Nachdem wir nun die Strahlungsabkühlung der Luft in Bodennähe allein berücksichtigt haben und dafür in (20) die Lösung gefunden haben, wollen wir jetzt für diese bodennahen Luftschichten die Modifikation durch den Austausch allein näher betrachten. Für nicht zu geringe Werte von A und für hinreichend lange Zeit gilt, wie man aus (5a) mit (9) und (10) sofort erkennt, wenn $\gamma = 0$ gesetzt wird, also Isothermie zur Zeit $t = 0$ zwischen Boden und Luft herrscht,

$$T - T_0 = \frac{C_2}{2} \cdot z, \quad (21)$$

mit C_2 nach (9). Wie man leicht mit den entsprechenden Bodenkonstanten für feuchten Sandboden (nach Hann-Süring, 5. Aufl., S. 104) und den Werten für die Luftdichte und spezifische Wärme der Luft nachrechnet, ergibt sich für 2 m Höhe ein Unterschied zwischen der Bodentemperatur und der in 2 m Höhe zu 0,05° C bei $A = 10$ und 0,27° C bei $A = 1$. Rechnet man dasselbe nach der exakten Formel (5a) für eine Zeit von 6 Stunden, so erhält man entsprechend 0,05° C und 0,26° C. Daraus wird ersichtlich, daß (21) bis zu Austauschwerten von $A = 1$ herunter als Näherung ohne weiteres brauchbar ist, wenn wir die Abkühlung erst nach einigen Stunden in Betracht ziehen. Nun besagt aber (21), daß sich infolge Abkühlung durch Austauschvorgänge nach einiger Zeit eine *konstante*, allerdings nur geringe Temperaturdifferenz Boden—Luft einstellt. Wenn wir also jetzt zu der Modifikation durch den Austausch noch zusätzlich die Abkühlung durch Eigenstrahlung gemäß dem Ansatz (15) berücksichtigen wollen, so haben wir hier den Vorteil, daß die Differenz $T - T_0$ konstant anzusetzen ist. Rechnet man mit denselben Werten für die spezifische Feuchte und die Luftdichte, wie in Tabelle 1, so ergeben sich aus (15) mit (21) für die Abkühlung durch Eigenstrahlung dT/dt die Werte der Tabelle 2.

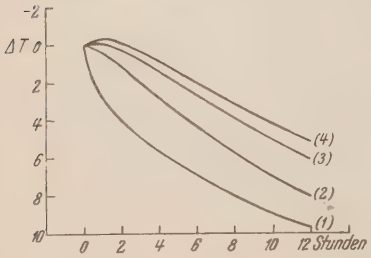


Abb. 4. Abkühlung der Luft in 2 m Höhe durch Eigenstrahlung als Funktion der Zeit bei gegebener Bodenabkühlung. (1) Abkühlung am Boden. (2) Abkühlung in 2 m Höhe bei gleicher Anfangstemperatur Luft—Boden. (3) Abkühlung in 2 m Höhe, jedoch der Erdboden zu Beginn um 2° wärmer als die Luft. (4) Abkühlung in 2 m Höhe, jedoch der Erdboden zu Beginn um 3° wärmer als die Luft.

Tabelle 2. *Abkühlung der Luft durch Eigenstrahlung bei gleichzeitigem vertikalem Austausch nach 6- bzw. 12stündiger Dauer.*

Austausch A	10	5	1	g cm^{-1} sek^{-1}
dT/dt nach 6 Stunden	0,098	0,168	0,504	Grade
„ 12 „	0,196	0,336	1,008	„ .

Man erkennt aus Tabelle 2, daß bei größeren Austauschwerten jedenfalls die Abkühlung der Luft durch Eigenstrahlung gegenüber der durch den Austausch vollkommen zu vernachlässigen ist. Sie macht bei Austausch $A = 1$ g/cm sec in 12 Stunden nur 1 Grad aus und liegt in kürzeren Zeiträumen und bei größeren Austauschwerten unterhalb der Beobachtungsgenauigkeit.

Wir können also über die Lösungen der Gl. (14), die für bodennahe Luftschichten die Modifikation durch Austausch und Eigenstrahlung festlegt und deren allgemeine Integration nicht ohne weiteres möglich ist, immerhin zusammenfassend folgendes aussagen: Sind die Austauschvorgänge in der Luft praktisch zu vernachlässigen, so wird die Abkühlung der Luft überwiegend durch Eigenstrahlung verursacht und wir erhalten für 2 m Höhe (Klimahütte) mit Hilfe einer Näherungslösung der ent-

sprechenden Differentialgleichung das Ergebnis der Abb. 4. Ist dagegen der Austausch $A \geqq 1$, so fällt die Strahlungsabkühlung gegenüber den Austauschvorgängen praktisch nicht mehr ins Gewicht und wir erhalten in erster Näherung für 2 m Höhe eine konstante Temperaturdifferenz Luft—Boden und für höhere Schichten einen Verlauf entsprechend der Abb. 1 bis 3.

Literaturverzeichnis.

1. W. Schwerdtfeger: Zur Theorie der polaren Temperatur- und Luftdruckwellen. Veröff. d. Geophys. Inst. Leipzig **4**, 255 (1931).
2. G. J. Taylor nach N. Shaw: Manual of Meteorology, Cambridge (1931).
3. H. Reuter: Zur Theorie der nächtlichen Abkühlung der bodennahen Schicht und Ausbildung der Bodeninversion. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa **155**, 334 (1947).
4. W. Elsasser: Heat transfer by infrared radiation in the atmosphere. Harv. Met. Stud. No. 6, 107 (1942).
5. F. Möller: Das Strahlungsdiagramm R. f. W., Berlin (1943).
6. H. A. Panofsky: Radiative cooling in the lowest layers of an atmosphere warmer than the ground. J. Meteor. IV, 35—37 (1947).
7. D. Brunt: Physical and Dynamical Meteorology. Cambridge (1939), 139.
8. Philipps: Zur Theorie der Wärmestrahlung in Bodennähe. Gerlands Beitr. **56**, 284 (1940).
9. Groen, P.: Note on the theory of nocturnal radiational cooling of the earth's surface. J. Meteor, **IV**, 63—66 (1947). — Groen, P.: On radiational cooling of earth's surface during the night, especially with regard to the prediction of groundfrosts. Mededeelingen en Verhandelingen, Serie B **I**, Nr. 9, Kon. Ned. Met. Inst. (1947).
10. Linke und Möller: Langwellige Strahlungsströme in der Atmosphäre und die Strahlungsbilanz. Hdb. d. Geoph. **VIII**, 688 (1943).
11. Sauberer, F.: Messungen des nächtlichen Strahlungshaushaltes der Erdoberfläche. Meteorol. Z. **53**, 296 (1936).

551.481

(Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien.)

Über die Mischungsarbeit von stabil geschichteten Wassermassen.

Von

O. Eckel, Wien.

Mit 1 Textabbildung.

Zusammenfassung. Es wird gezeigt, daß — entgegen der bisherigen Ansicht — die Mischungsarbeit von verschieden temperierten Wassermassen nicht unbegrenzt mit der Größe des Temperaturunterschiedes der Wassermassen anwächst, sondern daß sie für einen bestimmten Temperaturunterschied (bzw. bestimmten Temperaturgradienten) ein Maximum erreicht, für größere Temperaturunterschiede aber wieder auf wesentlich kleinere Beträge abnimmt.

Summary. It is shown that — in contradiction to the hitherto existing view — the energy resulting from the mixture of water-masses with different temperatures does not increase infinitely with the value of the temperature-difference of the water-masses, but that it reaches a maximum for a determined temperature-difference (respectively a determined temperature lapse rate), whereas it decreases to much smaller amounts for greater temperature-differences.

Résumé. On montre que, contrairement aux vues admises jusqu'ici, l'énergie résultant du mélange de masses d'eau à températures différentes ne croît pas sans limite avec l'écart de température, mais qu'elle atteint un maximum pour un écart déterminé (ou pour un gradient de température déterminé) et décroît de nouveau notablement pour des écarts plus grands.

Betrachtet man die Mischung von verschieden temperierten Wassermassen als rein mechanischen Vorgang, so läßt sich die Mischungsarbeit aus dem Produkt von Masse und Schwerpunktsverlagerung der durchmischten Wassermengen ermitteln. Diese so errechnete Größe ist aber nur ein Teil der zur Mischung tatsächlich aufgewendeten, und zwar die unbedingt notwendige Arbeit. Die beim Mischvorgang wirklich umgesetzte Energie wird außerdem durch die Arbeit zur Überwindung der Reibungskräfte und durch die Wärmetönung des Mischprozesses bestimmt. Die

hier berechnete mechanische Mischungsarbeit ist also stets unter dem Gesichtspunkt zu betrachten, daß es sich um das *Minimum* des Arbeitsaufwandes handelt.

Wegen der Temperaturabhängigkeit des spezifischen Volumens ist jeder Mischvorgang von verschieden temperierten Wassermassen stets mit einer Volumsverminderung verbunden. Wie in einer früheren Veröffentlichung* gezeigt wurde, muß dieser Umstand bei der Schwerpunktsberechnung der durchmischten Wassermassen berücksichtigt werden.

Als einfachstes Beispiel sei folgendes gewählt: Die Wassermasse bestehe aus zwei gleich mächtigen, aber verschieden temperierten Schichten. Dicke und Querschnitt der Schicht sei 1. Die Dichte des Wassers betrage in der oberen Schicht ϱ_1, in der unteren Schicht ϱ_2, nach der Durchmischung $\bar{\varrho}$. Dann errechnet sich der Schwerpunkt der gesamten Wassermasse vor der Mischung (ζ), bzw. nach der Mischung ($\bar{\zeta}$), wenn die Tiefe von der Oberfläche aus gezählt wird, wie folgt:

$$\zeta = \frac{\frac{1}{2}\varrho_1 + \frac{3}{2}\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}; \qquad \bar{\zeta} = 2 - \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)\,\frac{1}{\bar{\varrho}}.$$

Führt man statt ϱ die Größe σ gemäß Gleichung $\varrho = 1 - \sigma$ ein, so lassen sich diese Bestimmungsgleichungen unter Vernachlässigung von kleinen Gliedern höherer Ordnung in einer für die numerische Berechnung bequemeren Form schreiben:

$$\zeta = 1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4}; \qquad \bar{\zeta} = 1 + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \bar{\sigma}. \tag{1}$$

$\bar{\varrho}$ bzw. $\bar{\sigma}$ sind die der Mischtemperatur entsprechenden Dichtewerte. Die Mischtemperatur wird hier unter Berücksichtigung der verschiedenen Massen berechnet, wogegen der im selben Sinn wirkende Einfluß der verschiedenen Wärmekapazität vernachlässigt wurde:

$$\bar{t} = \frac{\varrho_1 t_1 + \varrho_2 t_2}{\varrho_1 + \varrho_2} \sim \frac{t_1 + t_2}{2} + \frac{t_1 + t_2}{2} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 t_1 + \sigma_2 t_2}{2}.$$

Wir betrachten nun eine ganze Folge von verschieden temperierten Doppelschichten. Die obere Schicht möge stets dieselbe Temperatur besitzen, die untere dagegen alle Temperaturen von 4° C bis zur Temperatur der oberen Schicht durchlaufen. Setzen wir für $t_1 = 100°$ C, so ergibt sich für die Schwerpunktslagen der verschiedenen Temperaturschichtungen der in Abb. 1 dargestellte Verlauf. ζ (= Schwerpunkt vor der Durchmischung) und $\bar{\zeta}$ (= Schwerpunkt nach der Durchmischung) liegen um so tiefer, je niedriger die Temperatur der unteren Schicht ist. Aber sie verlaufen keineswegs parallel. ζ sinkt mit Abnahme von t_2 erst rasch, dann immer langsamer, $\bar{\zeta}$ erst langsam, dann immer rascher,

* Eckel, O.: Über die mechanischen Arbeitsgrößen der Binnenseen. Arch. Met. u. Biokl. Ser. A, 1, 108—126 (1948).

so daß ihre Schaubilder eine verschiedene Art der Krümmung aufweisen. Dadurch kommt für die Differenz der beiden Schwerpunktslagen ein ausgesprochenes Maximum zustande, das für den berechneten Fall bei 41° C liegt.

Lassen wir nun auch die Temperatur der oberen Schicht variieren, und zwar von 4° auf 24° C — um den in unseren Seen vorkommenden Temperaturverhältnissen näherzukommen — und multiplizieren die Differenz der Schwerpunktslagen mit den jeder Schichtung entsprechenden Massen, so erhalten wir für alle möglichen Temperaturdifferenzen (obere — untere Schicht) die Maßzahl für die im Minimum zu leistende Arbeit, um die Schichtung völlig zu durchmischen, oder — nach W. Schmidt — die „Stabilität" der Schichtung. Diese Zahlen sind aus Tabelle 1 ersichtlich.

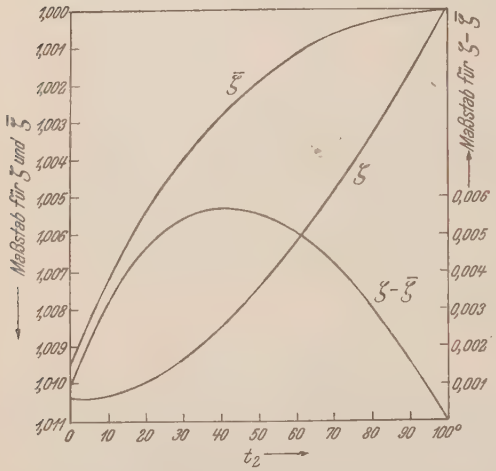


Abb. 1. Schwerpunktslage einer Doppelschicht. Temperatur der oberen Schicht konstant (= 100° C), Temperatur der unteren Schicht variabel (von 0° bis 100° C). ζ, $\bar{\zeta}$ = Schwerpunkt vor bzw. nach der Durchmischung.

Wir leiten folgendes ab: *Die Stabilität einer Temperaturschichtung wächst mit Zunahme des Temperaturunterschiedes obere — untere Schicht erst an, erreicht ein Maximum und fällt für größere Temperaturunterschiede wieder auf einen bestimmten Betrag ab.* Dieses Rechenergebnis steht in Widerspruch zur bisherigen Ansicht, daß die Stabilität um so größer sei, je bedeutender der Temperaturunterschied obere — untere Schicht wäre. Man nahm bisher nämlich irrtümlich an, der Schwerpunkt der durchmischten Wassermassen falle mit dem geometrischen Schwerpunkt der Doppelschicht zusammen.

Das Maximum der Stabilität ergibt sich für jede Temperaturschichtung im Bereich $4° \leqq t < 40°$ *C dann, wenn der Temperaturunterschied der oberen und unteren Schicht etwa* $\Delta t \sim \frac{t_1}{2} - 2$ *beträgt.* Dies kann man auch rechnerisch ableiten, wenn man für σ näherungsweise den Ausdruck setzt

$$\sigma \sim c \cdot (t - 4)^2 = c\, t^{*2}. \tag{2}$$

Dann wird gemäß Gleichung (1)

$$\zeta = 1 + c \cdot \frac{t_1^{*2} - t_2^{*2}}{4}; \quad \bar{\zeta} = 1 + c \cdot \frac{t_1^{*2} + t_2^{*2}}{2} - c \cdot \frac{(t_1^* + t_2^*)^2}{4};$$

$$\zeta - \bar{\zeta} = \frac{c}{2} \cdot t_2^* (t_1^* - t_2^*)$$

oder nach Einführung von $\Delta t = t_1^* - t_2^*$;

$$\zeta - \bar{\zeta} = \frac{c}{2} \cdot \Delta t \, (t_1^* - \Delta t). \tag{3}$$

$\zeta - \bar{\zeta}$ wird 0, wenn $\Delta t = 0$ oder $\Delta t = t_1^* = t_1 - 4$, also für den Fall verschwindenden oder größten Temperaturunterschiedes der beiden Schichten. Wie aus Tabelle 1 hervorgeht, nimmt aber die Funktion $\zeta - \bar{\zeta}$ für $\Delta t = t_1^*$ nicht den Wert 0 an, sondern hat dort einen sehr niedrigen Funktionswert. Der Unterschied zwischen Tabelle und Gleichung rührt aus der Verwendung der groben Näherung Gl. (2) zur Ableitung der Gl. (3) her.

Tabelle 1. *Stabilität einer ungleich temperierten Doppelschicht (rel. Einheiten).* t_1 = Temperatur der oberen Schicht, t_2 = Temperatur der unteren Schicht.

t_2 \ t_1	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
4	0	0	2	6	10	20	31	47	65	90	120
5	—8	8	24	44	62	86	111	139	171	210	250
6		0	32	64	98	134	173	213	259	308	362
7		—14	24	69	118	167	218	272	330	392	455
8			0	62	122	186	250	317	387	460	536
9			—38	38	112	188	265	345	427	510	600
10				0	89	176	268	360	454	549	650
11				—50	50	152	255	359	463	572	684
12					0	115	230	346	462	584	705
13					—64	64	191	317	447	578	712
14						0	140	278	420	561	704
15						—76	74	226	378	532	686
16							0	164	326	490	656
17							—88	86	260	436	611
18								0	184	372	556
19								—97	99	294	492
20									0	206	412
21									—108	109	326
22										0	227
23										—118	124
24											0
25											—130

Die Frage nach einem Extremum von $\zeta - \bar{\zeta}$ wird gelöst durch

$$\frac{d\,(\zeta - \bar{\zeta})}{d\,(\Delta t)} = \frac{c}{2}\,(t_1^* - 2\,\Delta t) = 0.$$

Für $\Delta t = \frac{t_1^*}{2}$ wird $\frac{d^2\,(\zeta - \bar{\zeta})}{d\,(\Delta t)^2}$ negativ, daher hat $\zeta - \bar{\zeta}$ an der Stelle $\tau = \frac{t_1^*}{2}$ einen Höchstwert.

Unter Berücksichtigung der tatsächlichen Dichtewerte ergeben sich folgende Wertepaare der Temperatur der oberen bzw. unteren Schicht, für die die Stabilität einen Maximalbetrag annimmt:

obere	Schicht:	100	70	40	20	10° C,
untere	„ :	41	31	21	12	7° C.

Das Maximum der Stabilität verflacht sich mit Anwachsen der Temperatur der oberen Schicht. Betrachtet man die Doppelschichten (t_1, $t_2 = -t_1 - \tau$ und t_1, $t_2 = 4$) und bildet den Quotienten aus den entsprechenden Stabilitäten, so erhält man bei Variieren der Temperatur der oberen Schicht (t_1) folgende Werte:

t_1	10	20	40	70	100° C,
Quotient	10,6	7,2	4,3	3,2	2,9.

Legt man für diese Betrachtungen nicht einen unstetigen Temperaturverlauf in der Doppelschicht zugrunde, sondern einen linearen Temperaturabfall mit der Tiefe, so ergibt sich für verschiedene Temperaturgradienten wiederum ein bestimmter, für den gerade die Stabilität einen Maximalbetrag annimmt. Wir verwenden zur Ableitung die allgemeine Formel* für die Stabilität einer Temperaturschichtung:

$$S = \gamma \cdot \sigma(\vartheta) \int_0^z f(z) \cdot z \cdot dz - \gamma \int_0^z f(z) \cdot \sigma(z) \cdot z \cdot dz.$$

S = Stabilität, γ = Schwerebeschleunigung, $\sigma = 1 - \varrho$, ϑ = Mitteltemperatur, f = Schichtenquerschnitt, z = laufende Tiefe, von der Oberfläche aus gezählt. Wir setzen nun $f(z) \equiv 1$, $t(z) = t_0 - \beta z$, $\sigma \sim c(t-4)^2 = c\,t^{*2}$, $\vartheta = \frac{t_0 + t_Z}{2} = t_0 - \frac{\beta}{2} \cdot Z$, $\sigma(\vartheta) = c(t_0^* - \frac{\beta}{2} Z)^2$, dann wird

$$S = \gamma \cdot c(t_0^* - \frac{\beta}{2} Z)^2 \int_0^z z\,dz - \gamma\, c \int_0^z (t_0^* - \beta z)^2 z\,dz =$$

$$= \gamma\, c \left(\frac{\beta\, t_0^*\, Z^3}{6} - \frac{\beta^2 Z^4}{8} \right).$$

S nimmt ein Extremum an, wenn

$$\frac{dS}{d\beta} = \gamma\, c\, Z^3 \left(\frac{t_0^*}{6} - \frac{\beta}{4} Z \right) = 0 \text{ oder } \beta = \frac{2}{3}\, t_0^*/Z. \qquad (4)$$

Wegen $\frac{d^2S}{d\beta^2} < 0$ für $\beta = \frac{2}{3}\, t_0^*/Z$, handelt es sich um ein Maximum. Wir sehen also: Bei linearem Temperaturabfall wird die Stabilität der Schicht dann einen maximalen Betrag annehmen, wenn der Temperaturgradient gerade $\frac{2}{3}\, t_0^*/Z$ beträgt, das heißt, wenn bei einer Oberflächentemperatur von t_0 die Unterfläche gerade die Temperatur $\frac{1}{3}(t_0 + 8)$ besitzt.

Folgerungen.

Soweit sich die obigen Ausführungen auf Schwerpunktsverlagerungen beziehen, ist ihr Ergebnis durchaus einleuchtend. Setzt man aber diese Schwerpunktsverlagerungen mit der Mischungsarbeit (Stabilität) in

* l. c. S. 116 Gl. (16a).

Beziehung, so kommt man schießlich zu folgendem Schluß: „Temperaturschichtungen mit geringem und übergroßem Gradienten sind gegen Austauschvorgänge weniger widerstandsfähig als solche mit mittlerem Gradienten." Diese Folgerung widerspricht aber der Erfahrung.

W. Schmidt** hat die Mischungsarbeit proportional der durch den Mischungsvorgang eintretenden Schwerpunktsverlagerung gesetzt. Auch wir folgten bei der Ableitung der Stabilität diesem Gedankengang, doch berücksichtigten wir, daß diese Schwerpunktsverlagerung infolge der mit dem Mischvorgang einhergehenden Volumsverminderung stets geringer ist als ohne Berücksichtigung derselben. Die Anwendung dieser Berechnungsart auf Wasserschichten von extrem großen Temperaturunterschieden, wie sie oben vorgenommen wurde, führt nun wegen ihres paradoxen Ergebnisses dazu, daß wir eine zweite Korrektur in den Schmidtschen Rechengrundlagen vornehmen müssen: Wir sind nicht berechtigt, die Differenz der Schwerpunktslagen vor und nach der Durchmischung als Maß für die Mischungsarbeit anzunehmen, sondern müssen trachten, die Lage des Schwerpunkts vor der Mischung und die höchste im Laufe des Mischprozesses eingenommene Schwerpunktslage miteinander zu vergleichen.

Ein einfaches Beispiel macht dies anschaulich: Ein Quader mit quadratischem Querschnitt liege auf horizontaler Ebene. Wird er um eine seiner zur Längsachse parallelen Kanten gekippt, so muß hiezu Arbeit gegen die Schwerkraft geleistet werden, obwohl vor und nach dem Kippvorgang der Körper ein und dieselbe Schwerpunktslage aufweist.

Auch im Wasser können wir uns den elementaren Mischvorgang so vorstellen, daß durch Turbulenz wärmere Massen unter kältere gebracht werden, also zur Herstellung einer isothermen Schichtung vorerst eine labile Schichtung erzeugt wird und hierbei Arbeit gegen die Schwerkraft zu leisten ist, die jedenfalls größer ist als jene, welche sich aus der Differenz von Anfangs- und Endlage des Schwerpunkts ergibt. Es bedarf daher weiterer Überlegungen, um aus einer gegebenen Temperaturverteilung einen besseren Näherungswert für die Mischungsarbeit abzuleiten, denn weder die Schmidtsche Methode noch die von uns vorgeschlagene können aus den eben dargelegten Gründen befriedigen.

** W. Schmidt, Über die Temperatur- und Stabilitätsverhältnisse von Seen. Geogr. Annaler, 1928.

Buchbesprechungen.

Musterbeispiele europäischer Großwetterlagen. Von F. Baur. Mit 25 Textabb., 35 S. Wiesbaden: Dieterichsche Verlagsbuchhandlung. 1947.

Sowohl für den täglichen Wetterdienst wie auch für eine moderne klimatologische Betrachtung, die das Vorkommen typischer Wetterlagen in den verschiedenen Jahreszeiten besonders zu beachten hat, ist die Kenntnis der Häufigkeit und des bevorzugten Auftretens markanter Großwetterlagen von besonderer Wichtigkeit. Bei der großen Mannigfaltigkeit der vorkommenden Wetterlagen ist es oft schwierig, eine beschränkte Auswahl von Typen derart zu treffen, daß damit alle charakteristischen Formen der Witterung erfaßt werden. Dies erfordert eine große Erfahrung, die dem Verf., der sich in jahrzehntelanger Arbeit besonders mit den Problemen der Mittel- und Langfristprognose beschäftigt hat, für die ja die Typisierung der Großwetterlagen von ausschlaggebender Bedeutung ist, in einem Ausmaß wie wohl kaum einem anderen europäischen Meteorologen zur Verfügung steht. Es ist daher besonders zu begrüßen, daß in dem vorliegenden Büchlein diese Erfahrung der Allgemeinheit zugänglich gemacht wird. F. Baur definiert als Großwetterlage die mittlere Luftdruckverteilung in einem größeren Gebiet von der Ausdehnung von Europa mit den angrenzenden Meeresteilen während eines Zeitraumes, in dem die Luftdruckverteilung und die durch die Bahnen aufeinanderfolgender 24stündiger Drucksteig- und fallgebiete charakterisierte „Steuerung" im wesentlichen gleichbleiben. Darnach werden 25 Typen der Großwetterlagen unterschieden, die sich in die sechs Hauptgruppen: Hoch im Nordwestraum, Hoch im Westen und Südwesten, kontinentales Hoch, Hoch im Südosten und Süden, zyklonale Westlagen und Tiefdrucklagen zusammenfassen lassen. Für jede dieser 25 Typen wird in dem Büchlein ein Musterbeispiel der Druckverteilung mit der Angabe der Daten des häufigsten Auftretens, des seltenen Vorkommens oder des Nichtvorkommens im Jahresverlauf nach den Beobachtungen aus dem Zeitraum von 1881 bis 1944 und den zugehörigen charakteristischen Witterungserscheinungen wiedergegeben. Zur Beurteilung der Bedeutung der einzelnen Großwettertypen für das Wetter in Mitteleuropa wäre auch die Angabe ihrer absoluten Häufigkeiten erwünscht gewesen. Anschließend folgt ein Kalendarium der Witterungsereignisse Mitteleuropas, die mit einer Häufigkeit von mehr als 60% in bestimmten Zeitabschnitten des Jahres aufgetreten sind. Im Anhang zeigen Tabellen, daß auf eine trockene überhitzte erste Junihälfte in Deutschland fast immer nasser Hochsommer und auf überwiegend schönes und trockenes Wetter im letzten Septemberdrittel ein Witterungsumschlag zu den ersten Oktobertagen erfolgt. Das Büchlein wird vielen sehr willkommen und von großem Nutzen sein.

F. Steinhauser, Wien.

La Foudre. Von Ch. Maurain. (Coll. Colin, Nr. 248.) Paris: 1948.

Der französische Geophysiker Charles Maurain hat in einem Büchlein von 215 Seiten in sehr klarer Form den heutigen Stand der Blitzforschung dargestellt; sein Werk empfiehlt sich als allgemeine Zusammenfassung unserer Kenntnisse auf diesem Forschungsgebiet und hat nicht zum Ziel, neue Ergebnisse zu liefern. Die neuesten Arbeiten, hauptsächlich von englischen und amerikanischen Forschern, sind erwähnt und ausführlich behandelt. In den letzten 15 Jahren sind bekanntlich wichtige Resultate durch die Technik der beweglichen Kamera und des Kathodenrohres erreicht worden, wodurch die Feinstruktur des Blitzes untersucht werden konnte. Es steht heute fest, daß der Blitz in mehrfache Komponenten zerfällt, und daß man zwischen Vor- und Hauptentladungen unterscheiden muß. Auch haben die Registrierungen von elektromagnetischen Störungen (atmosphärischen Parasiten) und deren radiogonometrische Lokalisierung dazu beigetragen, die Lage der Gewitterherde sowie ihre Wanderung über weite Gebiete der Erde näher zu studieren.

Maurain hat es verstanden, seinen Lesern eine klare Übersicht von den heute erreichten Resultaten in der schwierigen Frage des Blitzes zu geben; wertvolle Angaben enthält seine Schrift über die Größenordnung der beim Blitz beobachteten physikalischen Größen, wie Zeitdauer, Stromstärke, Spannung usw. Ältere und moderne Theorien werden einer strengen Kritik unterzogen; daß hier manche Probleme ihrer Lösung noch harren, ist offensichtlich. Das Buch, das mit einem Verzeichnis der wichtigsten Literatur versehen ist, kann Meteorologen und Geophysikern als Nachschlagewerk warm empfohlen werden. M. Bouët, Montana.

Een numerieke Methode voor de Bepaling von Temperatuursveranderingen door Straling in de vrije Atmosfeer. A numerical method for the calculation of temperature-changes by radiation in the free atmosphere. Von A. Bruinenberg. (Mededelingen en Verhandelingen Kon. Nederl. Met. Inst. Serie B I, Nr. 1.)

In den letzten 15 Jahren wurde der Berechnung der langwelligen Strahlungsströme in der Atmosphäre immer größere Beachtung geschenkt. Bekanntlich lag dabei die Hauptschwierigkeit in der möglichst genauen Berücksichtigung der Absorptionskoeffizienten von Wasserdampf und Kohlensäure. Das Resultat dieser Untersuchungen war die immer wieder verbesserte Herausgabe von Strahlungsdiagrammen, wie sie von Möller (Das Strahlungsdiagramm, R. f. W. Springer, Berlin 1943) einerseits und von Elsasser (Heat Transfer by Infrared Radiation in the Atmosphere. Harvard Meteor. Stud. no. 6. 107, 1942) anderseits in eine vorläufig endgültige Form gebracht wurden. Will man mit Hilfe dieser Diagramme die Abkühlungsgeschwindigkeit der freien Atmosphäre bestimmen, so muß man zunächst für verschiedene Höhen die effektiven Strahlungsströme ermitteln und aus dem so gewonnenen Differentialquotienten des effektiven Strahlungsstromes die Abkühlungsgeschwindigkeit berechnen. Dadurch kann immer nur ein mehr oder weniger grober Mittelwert für eine Schicht bestimmter Dicke ermittelt werden. Um diesem Übelstand abzuhelfen, wurde nun von Bruinenberg eine numerische Methode entwickelt, die es gestattet, für jedes bestimmte Niveau die Temperaturänderung direkt anzugeben. Zu diesem Zwecke wird gesondert die Änderung der aufwärts und abwärts die Atmosphäre durchsetzenden Strahlungsströme in einem hinreichend kleinen Höhenintervall nach dem

Möller-Diagramm berechnet. Die Temperaturänderung ergibt sich dann als ein Integral aus den zweiten partiellen Ableitungen dieser Strahlungsströme nach der Temperatur und dem Wasserdampfgehalt. Zur numerischen Lösung dieses Integrals konstruiert der Verfasser ein Diagramm und berechnet gleichzeitig entsprechende Tabellen. Ein weiterer Vorteil gegenüber der Methode, direkt aus dem Strahlungsdiagramm die effektiven Strahlungsströme zu ermitteln und erst aus der Änderung dieser Strahlungsströme mit der Höhe die Abkühlungsgeschwindigkeit zu berechnen, liegt vor allem auch darin, daß sozusagen ein Arbeitsgang durch die Diagramme und Tabellen Bruinenbergs vorweggenommen ist.

Die praktische Anwendung seiner Methode wird dann vom Verfasser an Hand einer Reihe von Beispielen aufgezeigt, wodurch die relativ rasche Berechnung der Temperaturänderung klar ersichtlich wird. Als ein kleiner Schönheitsfehler muß meines Erachtens angesehen werden, daß die Einheit der Abkühlungsgeschwindigkeit (wie übrigens auch bei den meisten anderen Autoren) in Grad pro 24 Stunden angegeben ist. Dies kann leicht zu dem Fehlschluß führen, daß eine solche Abkühlung nach einem Tag tatsächlich eintritt. In Wirklichkeit wird natürlich durch die Eigenstrahlung rasch die Temperaturverteilung modifiziert, was wieder die Abkühlungsgeschwindigkeit beeinflußt. Die einzige Möglichkeit, das Problem zu lösen, nämlich die den Vorgang regelnde Differentialgleichung anzusetzen, scheiterte an der Tatsache, daß die aus den Diagrammen zu bestimmenden Funktionen analytisch nicht angebbar sind. Um den tatsächlichen Verhältnissen näherzukommen, wäre es vielleicht angemessener, als Einheit für die Abkühlungsgeschwindigkeit eine kürzere Zeitspanne, etwa nur 1 Stunde, zu wählen.

In Ergänzung zu der Berechnung der Abkühlungsgeschwindigkeit durch Eigenstrahlung der Atmosphäre wird am Schluß der Arbeit noch die Geschwindigkeit der Erwärmung durch die kurzwellige direkte Sonnenstrahlung mit Hilfe von Diagrammen angegeben, wobei die bekannte empirische Formel von Möller Verwendung findet. Die Temperatur des Niveaus, das betrachtet wird, und der Wasserdampfgehalt der Luft über diesem Niveau, müssen bekannt sein. Dann läßt sich die Erwärmung in Grad pro Minute gemittelt über den ganzen Tag für die Breite von De Bilt für verschiedene Deklination der Sonne aus dem Diagramm ablesen. H. Reuter, Wien.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5.
Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. F. Steinhauser, Wien V, Schloßgasse 14.
Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX.

Es können grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; die Autoren sind verpflichtet, auch nachträglich bis mindestens zum 31. Dezember des auf das Erscheinen folgenden Kalenderjahres ihre Arbeit nicht anderweitig in gleicher oder ähnlicher Form zu veröffentlichen.

Die Autoren erhalten eine erste Fahnenkorrektur, die sie nach erfolgter Durchsicht an den Verlag zu senden haben; eine Umbruchkorrektur wird den Autoren nicht zugestellt.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Arbeit (ohne Umschlag) kostenlos; sie können eine beschränkte Anzahl weiterer Sonderdrucke gegen Entschädigung beziehen, müssen diese jedoch bei der Rücksendung der ersten Korrektur bestellen. Die Autoren von Originalarbeiten erhalten eine Unkostenentschädigung.

Manuskripte und Anfragen sind an einen der beiden unterzeichneten Herausgeber zu richten.

Dozent Dr. **W. Mörikofer**
Physikalisch-Meteorologisches Observatorium
Davos-Platz, Schweiz

Prof. Dr. **F. Steinhauser**
Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik
Wien V, Schloßgasse 14, Österreich

Springer-Verlag
Wien I, Mölkerbastei 5
Österreich

Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie

Herausgegeben von

Dozent Dr. **W. Mörikofer** Davos und Prof. Dr. **F. Steinhauser** Wien

Im Februar 1949 erscheint:

Serie B:

Allgemeine und biologische Klimatologie

Band I, Heft 2

Mit 18 Abbildungen. Etwa 100 Seiten

Inhaltsverzeichnis: **Courvoisier, P.** Luftdruckschwankungen und Wetterfühligkeit. — **Fontseré, E.** La Tramontane et le Mestral de la Côte Catalane. — **Fobes, C. B.** Extremes of Ice-Clearing Dates calculated from New Data of Maine and New Hampshire Lakes. — **Albrecht, F.** Die Weiterentwicklung der Meßtechnik des Wassergehalts des Bodens auf thermischer Grundlage. — **Courvoisier, P.** und **H. Wierzejewski.** Beiträge zur Strahlungsmeßtechnik II: Die Berechnung der Wirkungsweise kalorischer Strahlungsmeßinstrumente. — **Gorczynski, W.** Zur Vergleichbarkeit der Sonnenscheinregistrierungen von Europa und Nordamerika. — **Perl, G.** Die relative Feuchtigkeit an Tagen mit Hochnebeldecke über dem schweizerischen Alpenvorland. — Buchbesprechungen.

Handbuch der Gletscherkunde und Glazialgeologie.

Von Prof. Dr. **R. von Klebelsberg**, Innsbruck.

Erster Band: **Allgemeiner Teil.** Zweiter Band: **Historisch-regionaler Teil.**
Mit 93 Abbildungen. 1 Ausschlagtafel, XVIII, 1028 Seiten. 1948.

Beide Teile bilden zusammen ein organisches Ganzes und werden nur zusammen abgegeben.

Preis für das Gesamtwerk: S 442.—, sfr. 192.—, $ 44.70
geb. S 460.—, sfr. 200.—, $ 46.50

Zeitschrift für Gletscherkunde und Glazialgeologie.

Herausgegeben von Prof. Dr. **W. von Klebelsberg**, Innsbruck.

Auskunft über Erscheinungsweise, Bezugsmöglichkeiten, Preise usw. werden bereitwilligst vom Verlag erteilt.

Acta Physica Austriaca.

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Herausgegeben von **K. W. Fritz Kohlrausch**, Graz, und **Hans Thirring**, Wien. Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz.

Band 2, Heft 2. *Erschien im Oktober 1948.*
Mit 20 Abbildungen. 113 Seiten. S 42.—, sfr. 18.—, $ 4.20

Inhaltsverzeichnis: **Meyer, St.,** und **Agathe Koss-Rosenqvist.** Zur Genesis der chemischen Elemente. — **Meyer, St.,** und **Agathe Koss-Rosenqvist.** Kann man sich die Elemente mit durch die Zahl 4 teilbaren Atomgewichten aus Helium-Partikeln aufgebaut denken? — **Kratky, O.,** und **Günther Porod.** Die Abhängigkeit der Röntgen-Kleinwinkelstreuung von Form und Größe der kolloiden Teilchen in verdünnten Systemen, III. — **Skudrzyk, E.** Die Theorie der inneren Reibung in Gasen und Flüssigkeiten und die Schallabsorption. — **Karlik, Berta.** Zur Frage des Zusammenhangs zwischen Zerfallsenergie und Kernbau bei den α-Strahlern. — **Ehrenhaft, F.** Helical Paths in Longitudinal and Transversal Photophoresis, and about Brownian Movements. The Unipolar Magnetic charge. — **Ledinegg, E.** und **P. Urban.** Zur Theorie der Koppelschwingungen elektromagnetischer Hohlräume. — **Lohr, E.** Clemens Schaefer zu seinem 70. Geburtstag am 24. März 1948. — **Buchbesprechungen.**

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria